Textos

DE INFINITOS

GEORGE BERKELEY

(Traducción del inglés por José A. Robles)

ADVERTENCIA DEL TRADUCTOR

El breve escrito de Berkeley, "Of Infinites" ("De infinitos"), fue leído ante la Dublin (Philosophical) Society el 19 de noviembre de 1707 (su autor tenía entonces 22 años), según lo descubrió el Dr. A.A. Luce, hace ya más de 30 años. (Cf. *The Works of George Berkeley*, ed. por Luce y Jessop , vol. 9, p. 158; este volumen se publicó en 1957). El escrito permaneció inédito hasta el año de 1901 en el que Swift Payne Johnston, Profesor de Filosofía Moral del Trinity College de Dublin, lo descubrió y lo publicó en *Hermathena*, vol. XI, 1901 (*The Works of George Berkeley*, vol. 4, p. 233).

Esta conferencia berkeleyana encierra ya propuestas de gran importancia dentro de la filosofía de su autor, que éste desarrollará más adelante: algunas modificaciones se anuncian o surgen claramente ya en los *Philosophical Commentaries*, sus cuadernos de notas que está redactando en la época en que lee esta conferencia; luego algunas de las propuestas matemáticas las presenta, de manera comprimida, en los *Principios del conocimiento humano* (1710) y, con gran lucidez, en *The Analyst (El Analista)* de 1734. Aquí sólo mencionaré, a grandes rasgos, algunas de las propuestas centrales.

1. En este escrito, Berkeley acepta, siguiendo la tesis de Locke, la *divisibilidad* indefinidamente grande de una magnitud cualquiera, pero *no* acepta la existencia, *en acto*, de un número infinito de partículas en cualquier magnitud *finita* dada, ya sea ésta grande o pequeña.

Berkeley modificará más adelante, en la evolución de su pensamiento sobre estos temas, la primera propuesta y se negará a aceptar que los objetos perceptuales puedan dividirse más allá de un límite determinado, que se encuentra establecido por los *minima sensibilia* que, para él, son los componentes últimos de cualquier objeto perceptual.[1]

[1] Acerca del problema de los *minima* berkeleyanos, véase mi artículo, "Berkeley y los *minima*" en *Análisis Filosófico*, VI, 1: 1-12 (1986).

2. Berkeley, una vez más, acepta de Locke otra propuesta: tanto la significatividad de nuestro lenguaje como nuestra capacidad de conocer están determinadas y limitadas por las ideas; esto es, no hay palabra significativa, ni es posible conocer, si no hay alguna idea que aporte el significado o que avale el conocimiento.

Poco tiempo después de redactar este escrito, Berkeley encuentra esta tesis muy restrictiva y la modifica en el sentido de conceder que *hay* palabras que son significativas y que, a pesar de eso, no les corresponde idea alguna, así como que *hay* conocimiento de entidades que *no* pueden ser representandas por ideas, como nuestros espíritus y Dios, por ejemplo.[2]

Esta ampliación de la tesis semántica le va a permitir a Berkeley dar una versión nominalista-instrumentalista de la aritmética y del álgebra, así como de términos centrales de la física y de la geometría de la época.

Aquí deseo aclarar que Berkeley emplea el término 'idea' en un sentido muy restringido con respecto al que le concedían sus antecesores y, de manera central, Locke. Para Berkeley, una idea es una entidad *pasiva* (imagen o sensación) que recibimos por nuestros sentidos o sobre la que actuamos mediante nuestra memoria o nuestra imaginación.[3]

3. Berkeley ataca a los escritores infinitesimalistas de la época y la razón que da es absolutamente correcta: "...es imposible que pueda haber alguna cosa así [una línea infinitamente pequeña], pues toda línea, por pequeña que sea, es aún divisible en partes menores que ella misma. Por tanto, no puede haber ninguna cosa tal como una línea *quavis data minor...*".

A lo que de manera clara alude Berkeley en este pasaje es que, *conforme a los principios aceptados*, las líneas infinitamente pequeñas introducen una contradicción, son (lógicamente) imposibles. Una propuesta en la que se haga claro el porqué de esto no fue posible darla sino hasta este siglo, en la década de los años 60, en la obra de A. Robinson.

4. En este escrito, Berkeley da muestra de su conocimiento del trabajo tanto de los matemáticos ingleses que siguen la huella de Newton, como del de los matemáticos del continente europeo que siguen las propuestas de Leibniz y de los Bernoulli.

5. En términos generales, las otras propuestas de crítica matemática que figuran en este escrito, en contra de la identidad entre dos cantidades que sólo difieran por un infinitesimal, que los infinitesimales sean esenciales para las demostraciones geométricas —conforme a las pautas del nuevo análisis—, etc., encontrarán una argumentación y una fundamentación adecuadas en *The Analyst.*

Me parece de justicia añadir aquí que la creación de Robinson, el análisis no estándar, ofrece una clara y deslumbrante justificación *de las intuiciones*

---

[2] En "Génesis de la noción de sustancia espiritual en la filosofía de Berkeley, I," *Diánoia* 1984, pp. 67-87, intento seguir los cambios semánticos y sus razones, dentro de los *Comentarios filosóficos* berkeleyanos.

[3] Acerca de la distinción entre las versiones de idea —referida a contextos de percepción— de Locke y de Berkeley, véase mi "Berkeley: Distinción y Separación," en *Diálogos,* 54: 81-102 (1989).

de los matemáticos que Berkeley critica; pero también es importante subrayar que la obra de Robinson permite mostrar que estaban completamente equivocadas *las razones* que los matemáticos ofrecían para apoyar tales intuiciones y, justamente, fueron esas razones las que Berkeley atacó, de manera brillante, en *The Analyst* y que, en el "Of Infinites", comienzan a aflorar.

CONFERENCIA LEÍDA ANTE LA SOCIEDAD (FILOSÓFICA) DE DUBLIN EL 19 DE NOVIEMBRE DE 1707.

De Infinitos

Aun cuando los matemáticos de esta última época han hecho avances prodigiosos y han abierto diversos métodos admirables de investigación, desconocidos para los antiguos, sin embargo, algo hay en sus principios que ocasiona muchas controversias y disputas, para gran escándalo de la tan celebrada evidencia de la Geometría. A estas disputas y escrúpulos, que surgen del uso que se hace de cantidades infinitamente pequeñas en los métodos antes mencionados, tengo la audacia de pensar que fácilmente se les podría poner fin tan sólo mediante la consideración de un pasaje en el incomparable tratado del señor Locke sobre el *Entendimiento humano*, Libro 2, cap. 17, sec. 7, donde ese autor, manejando el tema de la infinitud con el juicio y la claridad que le son tan característicos, tiene estas palabras notables.

> Supongo que causamos gran confusión en nuestros pensamientos cuando unimos la infinitud a cualquier supuesta idea de cantidad que se piense que tiene la mente, y discurrimos o razonamos, de está manera, sobre una cantidad infinita, a saber, un espacio infinito o una duración infinita. Pues como, según creo, nuestra idea de infinitud es una idea en crecimiento sin fin, en tanto que la idea de cualquier cantidad que la mente tiene está en ese momento terminada en esa idea, unirle la infinitud es adaptar una medida fija a una magnitud creciente y, por tanto, creo que no es una sutileza sin sentido si digo que hay que distinguir cuidadosamente entre la idea de la infinitud del espacio y la idea del espacio infinito.

Ahora bien, si lo que dice el señor Locke se aplicase, *mutatis mutandis* a cantidades infinitamente pequeñas, sin duda que nos sacaría de esa oscuridad y confusión que de otra manera entorpecen muy grandes mejoras en el Análisis Moderno. Pues quien, con el señor Locke, le dé el peso debido a la distinción que hay entre la infinitud del espacio y el espacio infinitamente grande o pequeño, y considere que tenemos una idea del primero pero ninguna en absoluto del último, difícilmente rebasará sus nociones para hablar de partes infinitamente pequeñas o *partes infinitesimæ* de cantidades finitas y, mucho menos, de *infinitesimæ infinitesimarum* y así sucesivamente. Esto, sin embargo, es muy común en los escritores de fluxiones o del cálculo diferencial,[4] etc. Ellos representan, en papel, infinitesimales de varios órdenes como si tuviesen en sus mentes ideas que correspondiesen a esas palabras o signos, o como si no incluyese una contradicción que hubiese una línea infinitamente pequeña y aún otra infinitamente menor que esa. A mí me es claro que no debemos usar ningún signo sin una idea que le corresponda y es muy claro que no tenemos ninguna idea de una línea infinitamente pequeña y no sólo eso, sino que es imposible que pueda haber alguna cosa así, pues toda línea, por pequeña que sea, es aún divisible en partes menores que ella misma. Por tanto, no puede haber ninguna cosa tal como una línea *quavis data minor* o infinitamente pequeña.

Además, claramente se sigue que un infinitesimal, incluso del primer grado, es meramente *nada,* por lo que escribe el Dr. Wallis, un matemático reconocido, en la proposición 95 de su *Arithmetic of Infinites,*[5] donde hace que el espacio asintótico incluido entre las dos asíntotas y la curva de una hipérbola sea, conforme a su estilo, una *series reciproca primanorum,* de tal manera que el primer término de la serie, a saber, la asíntota, surge de la división del 1 entre 0. Puesto que, por tanto, la unidad, esto es, cualquier línea finita dividida por 0 da la asíntota de una hipérbola, esto es, una línea infinitamente larga, se sigue necesariamente que una línea finita dividida por una infinita da 0 como cociente, esto es, que la *pars infinitesima* de una línea finita es tan sólo nada. Pues, por la naturaleza de la división, el dividendo dividido por el cociente da el divisor. Ahora bien, difícilmente se supondrá que un hombre que hable de líneas infinitamente pequeñas quiera decir algo con esto y, si entiende las cantidades finitas reales, caerá en dificultades inextricables.

Detengámonos un poco en la controversia entre el señor Nieuentiit y el señor Leibnitz.[6] El señor Nieuentiit acepta que los infinitesimales del primer

---

[4] Newton hablaba de *fluxiones* y los autores continentales hablaban de *diferencias,* en sus correspondientes versiones del cálculo, por lo que aquí Berkeley alude a ambos al hablar de 'escritores de fluxiones o del cálculo diferencial'.

[5] John Wallis (1616-1703) fue uno de los notables matemáticos de la época que más hicieron por separar el análisis de la intuición geométrica que aún era la norma a seguir. Sus tratados, en los que, justamente, se pretendía evitar el apoyo geométrico y desarrollar el aspecto analítico o algebraico, dieron pie para que Hobbes lo atacara con gran vehemencia. El libro de Wallis al que aquí alude Berkeley es su *Arithmetica Infinitorum* de 1655. Quien desee ver el detalle técnico de la propuesta de Wallis puede consultar con provecho las notas (esp. n. 6) de la excelente traducción al francés de 'Of Infinites', de Dominique Berlioz-Letellier: *Revue Philosophique de la France et de l'Étranger,* CLXXII: 45-57 (1982).

[6] Berkeley alude aquí a Bernard Nieuwentijt (1654-1718), médico burgomaestre de la ciudad de Parmerend, cerca de Amsterdam. Por los años de 1694-96 hace una serie de publicaciones en las que pone en entredicho los *métodos* usados por Newton y por

orden son cantidades reales, pero elimina las *differentiæ differentiarum* o infinitesimales de los siguientes órdenes, como otras tantas nadas. Esto es lo mismo que decir que es igual a nada el cuadrado, cubo u otra potencia de una cantidad real positiva, lo que es manifiestamente absurdo.

Asimismo, el señor Nieuentiit presenta esto como un axioma evidente de suyo, a saber, que entre dos cantidades iguales no pueda haber ninguna diferencia o, lo que es lo mismo, que su diferencia es igual a nada. Esta verdad, por clara que sea, el señor Leibnitz se apega a negarla, aseverando que no tan sólo son iguales esas cantidades que no tienen diferencia alguna, sino que también lo son aquellas cuya diferencia es incomparablemente pequeña. *Quemadmodum* (nos dice) si *lineæ punctum alterius lineæ addas quantitatem non auges*. Pero si las líneas son infinitamente divisibles, pregunto, ¿cómo puede haber cosa tal como un punto? O, concediendo que haya puntos, ¿cómo puede pensarse que es la misma cosa añadir un punto indivisible que añadir, por ejemplo, la *differentia* de una ordenada, en una parábola, que tan lejos está de ser un punto que ella misma es divisible en un número infinito de cantidades reales, de las que cada una puede subdividirse *in infinitum* y así sucesivamente, conforme al señor Leibnitz? Éstas son dificultades en las que han caído esos grandes hombres por aplicar la idea de infinitud a partículas de extensión excesivamente pequeña, pero reales y aún divisibles.[7]

Algo más de esta disputa puede verse en las *Acta Eruditorum* del mes de julio, A.D. 1695, en las que, si podemos creer al autor francés del *Analyse des infiniment petits*,[8] el señor Leibnitz ha establecido y justificado suficientemente sus principios. Aun cuando es claro que no le preocupa po-

---

Leibniz; métodos que, aun cuando en general conducían a resultados correctos, podían llevar a los mayores absurdos. Como lo señala Berkeley en este escrito, Nieuwentijt se niega a aceptar los infinitesimales de órdenes superiores, así como no puede entender la diferencia que pueda haber entre un infinitesimal y cero. (Cf. Morris Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, p. 385.)

[7] Esta línea señala la posición de Berkeley: cualquier extensión, por excesivamente pequeña que sea, es finita y, por tanto, conforme a los principios (oscuramente aceptados) de la época, susceptible de recibir nuevas divisiones. Lo que implícitamente se está aceptando en esta argumentación (tanto por parte de los matemáticos de la época como del mismo Berkeley), es la validez del Principio de (Eudoxo y) Arquímedes que señala que cualquier magnitud, por pequeña que ésta sea, alcanzará cualquier otra magnitud, por grande que sea esta última, si la primera se multiplica un número *finito* suficiente de veces para lograr eso mismo. Con lo anterior se presupone que ambas magnitudes *son* finitas; por otra parte, también se asume que la división de cualquier magnitud, un número indefinidamente grande de veces (en caso de que esto sea posible), sólo puede producir otra magnitud, menor, pero aún divisible.

[8] Berkeley alude aquí a Guillaume François Antoine *Marquis* de l'Hospital (1661-1704), un discípulo de Johann Bernoulli, quien escribe, en 1695, el primer tratado de cálculo diferencial, siguiendo los pasos de Leibniz y de su maestro, *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*.

nerlos en duda y parece temer que *nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur,*[9] como si un hombre pudiese ser demasiado escrupuloso en matemáticas o como si los principios de la Geometría no debiesen ser tan indiscutibles como las consecuencias que se extraen de ellos.

Hay un argumento del Dr. Cheyne en el capítulo 4 de sus *Philosophical Principles of Natural Religion*[10] que parece apoyar las cantidades infinitamente pequeñas. Sus palabras son las siguientes:

> Toda la geometría abstracta depende de la posibilidad de cantidades infinitamente grandes y pequeñas y las verdades descubiertas por métodos que dependen de estas suposiciones se confirman por otros métodos que tienen otros fundamentos.

A lo que respondo que la suposición de cantidades infinitamente pequeñas no le es esencial a los grandes avances del Análisis Moderno. Pues el señor Leibnitz reconoce que su *Calculus differentialis* podría demostrarse por *reductione ad absurdum* a la manera de los antiguos y Sir Isaac Newton, en un último tratado nos informa que su método de las fluxiones puede obtenerse *a priori* sin la suposición de cantidades infinitamente pequeñas.[11]

No puedo dejar de señalar un pasaje del tratado del señor Raphson, *De Spatio Reali seu Ente Infinito,*[12] cap. 3, p. 50, en el que él tomaría una partícula infinitamente pequeña como si fuese *quasi extensa*. Pero no puedo comprender lo que el señor Raphson podría imaginase que quiere decir con

---

[9] En años posteriores, Berkeley le opondrá a esta frase de Leibniz, 'que escrúpulos deleznables no entorpezcan el arte de inventar', la propuesta de Newton en su *Tractatus de Quadratura Curvarum:* "errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi" ("en asuntos matemáticos no son desdeñables los errores, por mínimos que éstos sean"), que es el sentido que tienen las expresiones de Berkeley en contra de la expresión leibniziana.

[10] George Cheyne (1671-1743), fue un médico londinense, autor de *Fluxionum Methodus Inversa* (1703) y de *Philosophical Principles of Natural Religion,* compuesto de dos partes: la parte I fue publicada en 1705, la II, aparece en 1716. Obviamente aquí Berkeley se refiere a la I. Según lo señala Cajori (en *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse,* p. 289), "Como el *Analista* de Berkeley, que fue escrito después, el libro de Cheyne, en sus dos partes, tenía como propósito principal la refutación del ateísmo" pero, a diferencia de Berkeley, Cheyne aceptaba las cantidades infinitamente pequeñas.

[11] El tratado de Newton al que aquí alude Berkeley, es el ya citado *Tractatus de Quadratura Curvarum,* publicado en 1704.

[12] Joseph Raphson (1648-1715), según nos dice Luce (en su *Editio Diplomatica* de los *Philosophical Commentaries,* p. 378), "virtualmente deificó el espacio, denominándolo actus purus, incorporeum, immutabile, æternum, omni-continens, omnipenetrans, atributum (*viz,* immensita) primæ causæ." Además de mencionarlo un par de veces en los *Philosophical Commentaries,* Berkeley le señala a su corresponsal, Samuel Johnson, en una carta del 24 de marzo de 1730, que Raphson es un matemático que pretende encontrar, en el espacio, quince de los atributos incomunicables a Dios.

pars continui quasi extensa. También deseo que se me permita observar que algunos notables escritores modernos no tienen escrúpulos para hablar de una esfera de radio infinito o de un triángulo equilátero de un lado infinito que son nociones que si se las examina con cuidado se hallará, quizás, que no están del todo libres de inconsistencias.

Ahora bien, yo soy de la opinión de que cesarían todas las disputas acerca de los infinitos y ya no confundiría a los matemáticos la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas, si ellos tan sólo uniesen la Metafísica a su Matemática y condescendiesen a aprender del señor Locke la distinción que hay entre infinitud e infinito.