SOBRE LAS HIPOTESIS QUE ESTAN EN LA BASE DE LA GEOMETRIA

BERNHARD RIEMANN

(Traducción de Roberto Torretti)

NOTA DEL EDITOR DEL ORIGINAL ALEMAN. El autor leyó el presente ensayo el 10 de junio de 1854 en un coloquio con la Facultad de Filosofía de Göttingen, que tuvo lugar con motivo de su habilitación. Ello explica la forma de la exposición, en la cual las investigaciones analíticas solamente se insinúan. Me propongo referirme próximamente a éstas en un artículo especial. Braunschweig, julio de 1867. R. DEDEKIND.¹

Como es sabido, la geometría presupone como algo dado tanto el concepto del espacio como los primeros conceptos fundamentales para las construcciones en el espacio. Da de ellos sólo definiciones nominales, mientras que las determinaciones esenciales se presentan en la forma de axiomas. La relación entre estos supuestos permanece en la oscuridad; no se percibe si su entrelazamiento es necesario, ni en qué medida lo es; tampoco se sabe a priori si es siguiera posible.

Desde Euclides hasta Legendre —para nombrar al más celebre tratadista moderno de geometría— tal oscuridad no ha sido disipada ni por los matemáticos ni por los filósofos. Ello se debe probablemente a que nadie ha examinado el concepto general de cantidad multidimensional, bajo el cual caen las magnitudes espaciales. Me he propuesto pues en primer término el problema de construir el concepto de una cantidad multidimensional partiendo de conceptos generales de cantidad. Pondré en evidencia que una cantidad multidimensional admite [8] diversas relaciones métricas y que el espacio constituye, por lo tanto, sólo un caso particular entre las

cantidades tridimensionales. De aquí se sigue necesariamente que las proposiciones de la geometría no se pueden deducir de conceptos generales de cantidad, de suerte que las propiedades que distinguen al espacio de otras cantidades tridimensionales concebibles sólo pueden tomarse de la experiencia.2 Ello suscita el problema de buscar los hechos más simples que determinan las relaciones métricas del espacio, un problema que conforme a la naturaleza misma del asunto no está enteramente determinado, pues es dable indicar varios sistemas de hechos simples que bastan para la determinación de la relaciones métricas del espacio; para nuestro presente propósito el más importante entre ellos es el adoptado por Euclides. Estos hechos, lo mismo que cualesquiera otros, no son necesarios; su certidumbre es solamente empírica. Son hipótesis. Se puede entonces investigar su probabilidad —la cual es en todo caso muy grande dentro de los límites de la observación— y juzgar de acuerdo con ella acerca de la licitud de extrapolarlos más allá de los límites de la observación, hacia el lado de lo inconmensurablemente grande y hacia el de lo inconmensurablemente pequeño.

I. Concepto de una cantidad n-dimensional

Al intentar resolver por de pronto el primero de estos problemas, a saber, el desarrollo del concepto de cantidad multidimensional, me siento con tanto más derecho a pedir indulgencia, cuanto que estoy poco ejercitado en tales labores de índole filosófica, en que las dificultades residen más bien en los conceptos que en la construcción, y que no he podido utilizar absolutamente ningún trabajo previo, excepto algunas indicaciones brevísimas que el Consejero Privado Sr. Gauss da al respecto en su segundo ensayo sobre los residuos bicuadráticos, publicado en el Göttingensche gelehrte Anzeiger, y en su escrito de jubileo, y algunas investigaciones filosóficas de Herbart.

[9] Los conceptos de cantidad sólo son posibles si se dispone de un concepto general que admite diversas especificaciones. Según que haya o no un paso continuo de cada una de estas especificaciones a las otras, ellas constituyen una variedad continua o discreta. Las especificaciones particulares se llaman en el primer caso puntos, en el otro elementos de la variedad. Los conceptos cuyas especificaciones

constituyen una variedad discreta son tan abundantes que, al menos en las lenguas más cultas, siempre es posible hallar un concepto bajo el cual subsumir [un conjunto de] objetos cualesquiera, reunidos al azar. (Y los matemáticos han podido por esto, en la teoría de las cantidades discretas, partir sin reservas del postulado de que los objetos dados han de considerarse como homogéneos.) En cambio, las oportunidades para la formación de conceptos cuyas especificaciones constituyen una variedad continua son tan escasas en la vida diaria, que las posiciones de los objetos de los sentidos y los colores son quizás los únicos conceptos simples cuyas especificaciones forman una variedad multidimensional. Sólo en la matemática superior abundan algo más las ocasiones para generar y elaborar tales

conceptos.

Las partes determinadas de una variedad, distinguidas por una característica o un límite, se llaman cuantos. Se las compara cuantitativamente, en el caso de las cantidades discretas, por enumeración, y en el de las continuas, por medición. La medición consiste en una superposición de las cantidades que se han de comparar. Para la medición, pues, es preciso transportar una cantidad como patrón de las otras. Sin ello, sólo es dable comparar dos cantidades si una de ellas es parte de la otra. Entonces se puede establecer que una es mayor o menor que la otra, más no cuánto lo es. Las investigaciones que cabe desarrollar al respecto en este caso constituyen una parte general de la teoría de la cantidad, que no depende de determinaciones métricas. En ella las cantidades no se consideran como existiendo independientemente de su colocación ni como expresables mediante una unidad, sino como regiones de una variedad. Tales investigaciones se han vuelto imprescindibles en varias partes de las matemáticas, [10] especialmente en el tratamiento de las funciones analíticas plurivalentes. La carencia de ellas es tal vez una de las principales causas de que el célebre teorema de Abel y los logros de Lagrange, Pfaff y Jacobi hayan permanecido por tanto tiempo sin aprovechar en la teoría general de las ecuaciones diferenciales. Para nuestro propósito basta destacar dos puntos de esta parte general de la teoría de las cantidades extensas, en la que sólo se presupone lo que ya está contenido en el concepto de las mismas. El primero de ellos concierne a la generación del concepto de una variedad multidimensional; el segundo concierne a la reducción de las determinaciones de posición en una variedad dada a determinaciones cuantitativas y permitirá aclarar la característica esencial de la extensión n-dimensional.

Si en el caso de un concepto cuyas especificaciones constituyen una variedad continua se pasa de una manera determinada de una especificación a otra, las especificaciones recorridas forman una variedad unidimensional, cuya característica esencial es que en ella se puede avanzar continuamente desde un punto sólo en dos direcciones: hacia adelante y hacia atrás. Si ahora concebimos que esta variedad pasa a otra, enteramente distinta, también de una manera determinada, esto es, de suerte que cada punto pasa a un punto determinado de la otra, la totalidad de las especificaciones así obtenidas constituye una variedad bidimensional. Análogamente se obtiene una variedad tridimensional si uno se figura que una bidimensional pasa de una manera determinada a otra enteramente diferente, y es fácil de ver como puede continuarse esta construcción. Si en vez de considerar al concepto como determinable, consideramos a su objeto como variable, esta construcción puede caracterizarse como la composición de una variabilidad de n+1 dimensiones a partir de una variabilidad de n dimensiones y una variabilidad de una dimensión.

3

[11] Mostraré ahora que se puede, a la inversa, descomponer una variabilidad cuyo dominio está dado en una variabilidad de una dimensión y una variabilidad de menos dimensiones que la primera. Con este fin concíbase un segmento variable de una variedad de una dimensión -partiendo de un origen fijo, a fin de que los valores del segmento puedan compararse mutuamente— el cual para cada punto de la variedad dada toma un valor determinado que varía de manera continua según se va pasando de un punto a otro. En otras palabras, supóngase que se ha definido en la variedad dada una función continua de la posición que no es constante sobre una parte de dicha variedad. Cada sistema de puntos en que la función tiene un valor constante constituye entonces una variedad continua de menos dimensiones que la variedad dada. Según varía la función se pasa continuamente de una de estas variedades a otra. Cabe pues suponer que de una de ellas surgen todas las demás, lo cual, en términos generales, puede ocurrir de tal modo que cada punto [de aquélla] pase a un punto determinado de [cada una] de las otras. (Podemos dejar de lado aquí las excepciones, aunque su investigación es importante.) En esta forma la determinación de la posición en la variedad dada se reduce a una determinación cuantitativa y una determinación de posición en una variedad de menos dimensiones. Es fácil mostrar que esta última variedad tiene n-1 dimensiones, si la variedad dada es n-dimensional. Repitiendo este procedimiento n veces se reduce pues la determinación de la posición en una variedad n-dimensional a n determinaciones cuantitativas, y así la determinación de la posición en una variedad dada puede expresarse, cuando esto es posible, mediante un número finito de determinaciones cuantitativas. Hay empero variedades en que la determinación de la posición demanda no un número finito sino una secuencia infinita o hasta una variedad continua de determinaciones cuantitativas. Ejemplos de tales variedades son las posibles determinaciones de una función [definible] [12] en un dominio dado, las formas posibles de una figura espacial, etc.

II. Relaciones métricas que admite una variedad de n dimensiones, bajo el supuesto de que las líneas tienen una longitud independiente de su colocación y por consiguiente cada línea puede ser medida por cualquier otra línea.

Habiendo construido el concepto de una variedad n-dimensional y hallado que su característica esencial consiste en que la determinación de la posición en ella se reduce a n determinaciones cuantitativas, corresponde abordar el segundo de los problemas arriba planteados, a saber, la investigación de las relaciones métricas que una tal variedad admite y de las condiciones suficientes para la determinación de dichas relaciones métricas. Para investigar esas relaciones métricas hay que recurrir a conceptos cuantitativos abstractos y sólo mediante fórmulas se las puede exponer hilvanadamente; pero bajo ciertos supuestos es posible analizarlas en relaciones que tomadas separadamente admiten una representación geométrica. De esta suerte será posible expresar geométricamente los resultados del cálculo. Para apoyarse en una base sólida será inevitable pues una investigación abstracta y que utilice fórmulas, pero sus resultados se podrán presentar luego con una vestidura geométrica. Los fundamentos de ambas etapas están contenidos en el célebre tratado el Consejero Privado Sr. Gauss acerca de las superficies curvas.

1

Las determinaciones métricas requieren que las cantidades sean independientes de la posición. Esto puede obtenerse de más de una

manera. La hipótesis que primero se nos ocurre y que seguiré aquí estipula que la longitud de las líneas no depende de su colocación, de modo que cada línea puede ser medida por cualquiera otra. Si la determinación de la posición se ha reducido a determinaciones cuantitativas y por lo tanto la posición de un punto en la variedad n-dimensional dada [13] se expresa mediante n cantidades variables x_1, x_2, x_3, y así sucesivamente hasta x_n , la determinación de una línea redunda en dar las cantidades x [correspondientes a los puntos de la línea] como funciones de una variable. El problema consiste entonces en hallar una expresión matemática de la longitud de una línea, para lo cual las cantidades x han de considerarse como expresables en unidades. Trataré este problema sólo bajo ciertas restricciones. Me limito pues, en primer lugar, sólo a líneas tales que las proporciones entre las cantidades dx—las respectivas variaciones de las cantidades x— varían en forma continua; se puede entonces concebir a las líneas como constando de elementos, dentro de cada uno de los cuales las proporciones entre las cantidades dx puedan considerarse constantes; el problema se reduce pues a determinar para cada punto una expresión general del elemento de línea ds que parte de él, la cual contendrá entonces las cantidades x y las cantidades dx. Supongo, en segundo lugar, que la longitud del elemento de línea, si se prescinde de las cantidades de segundo orden, permanece constante cuando todos los puntos del mismo experimentan el mismo desplazamiento infinitesimal; esto implica también que si todas las cantidades dx crecen en la misma proporción, el elemento de línea cambia justamente en esa proporción. Bajo los supuestos antedichos el elemento de línea podrá ser cualquiera función homogénea de primer grado de las cantidades dx, que no cambie si todas las cantidades dx cambian de signo [a la vez] y en la cual los coeficientes arbitrarios sean funciones continuas de las cantidades x. Para hallar los casos más simples busco primero una expresión para las variedades (n-1)-dimensionales que equidistan en todas direcciones del origen del elemento de línea; vale decir, busco una función continua de la posición que las distinga unas de otras. Esta [función] habrá de crecer o decrecer desde el origen en todas direcciones; supondré que crece y que por lo tanto tiene un mínimo en el origen. Si las derivadas primeras y segundas son finitas, la diferencial de primer orden se anula y la de segundo orden [14] no puede ser negativa; supongo que es siempre positiva. Esta expresión diferencial de segundo orden se mantiene constante si ds es constante y crece en proporción al cuadrado si las cantidades dx -y ds con ellas- crecen todas en una misma proporción; es pues igual a la raíz cuadrada de una función entera, homogénea de segundo grado y siempre positiva,

de las cantidades dx, en la que los coeficientes son funciones continuas de las cantidades x. En el caso del espacio, si la posición de los puntos se expresa mediante coordenadas ortogonales, ds = $\sqrt{\Sigma (dx)^2}$; el espacio pertenece pues a nuestro caso más simple. El caso que le sigue en simplicidad abarcaría quizás las variedades en que el elemento de línea se puede expresar como la raíz cuarta de una expresión diferencial de cuarto orden. Tal expresión puede transformarse en otra similar sustituyendo las n variables independientes por funciones de n nuevas variables independientes. Por esta vía, empero, no será posible transformar cualquier expresión en cualquier otra, pues la expresión contiene n (n+1)/2 coeficientes, que son funciones arbitrarias de las variables independientes; al introducir variables nuevas se podrá satisfacer sólo n relaciones y por lo tanto sólo se podrá hacer que n de los coeficientes sean iguales a cantidades dadas. Los restantes n(n-1)/2 [coeficientes] están ya pues completamente determinados por la índole de la variedad que se trata de representar, para la determinación de cuyas relaciones métricas se requieren entonces n(n-1)/2 funciones de la posición. Las variedades, [15] como el plano y el espacio, en que el elemento de línea se deja reducir a la forma $\sqrt{\Sigma dx^2}$ constituyen pues sólo un caso especial entre las variedades investigadas aquí. Merecen por ende un nombre especial. Llamaré entonces a estas variedades en que el cuadrado del elemento de línea puede expresarse como una suma de cuadrados de diferenciales totales, [variedades] planas. Para obtener una visión de conjunto de las diferencias esenciales de todas las variedades representables en la forma que hemos supuesto, es menester prescindir de las [diferencias] que resultan del modo de representación. Ello se logra eligiendo las cantidades variables con arreglo a cierto principio.

2

Con este fin, piénsese que se ha construido el sistema de todas las geodésicas que parten de un punto dado. La posición de un punto cualquiera puede determinarse entonces indicando la dirección inicial de la geodésica sobre la cual se encuentra y la distancia —medida a lo largo de dicha geodésica— que lo separa del origen; puede expresársela entonces por las proporciones dx^0 de las cantidades dx en esta geodésica y por la longitud s de la misma. Sustituyánse ahora las dx^0 por expresiones lineales da formadas con ellas, tales que el valor inicial del cuadrado del elemento de línea sea igual a la suma de los cuadrados de estas expresiones. Las variables independientes son entonces la cantidad s y las proporciones de las cantidades da.

Sustitúyanse finalmente las da por cantidades proporcionales a ellas, x_1, x_2, \dots, x_n , tales que la suma de los cuadrados sea igual a s^2 . Al introducir estas cantidades, el cuadrado del elemento de línea resulta ser, para valores infinitesimales de las x, igual a Σdx^2 , pero el término del orden siguiente en su expansión es igual a una expresión homogénea de segundo grado de las n(n-1)/2 cantidades $(x_1dx_2-x_2dx_1), (x_1dx_3-x_3dx_1), \dots, o$ sea una cantidad infinitesimal de cuarto orden, de suerte que se obtiene una cantidad finita al dividirla por el cuadrado del [área del] triángulo infinitesimal [16] en cuyos vértices las variables toman los valores (0, 0, 0, ...), $(x_1,x_2,x_3,...)$ y $(dx_1,dx_2,dx_3,...)$, respectivamente. Esta cantidad conserva el mismo valor mientras las cantidades x y dx estén contenidas en las mismas formas bilineales, vale decir, mientras las dos geodésicas desde [el punto en que las variables toman] los valores O hasta [aquél en que toman] los valores x y desde [el punto en que toman] los valores 0 hasta [aquél en que toman] los valores dx permanezcan sobre el mismo elemento de superficie; ella depende, por lo tanto, sólo de la posición y la dirección de éste último. Será obviamente igual a cero si la variedad representada es plana, esto es, si el cuadrado del elemento de línea es reducible a dx^2 . Por esta razón dicha cantidad puede considerarse como un índice de la medida en que la variedad se desvía de la condición plana en ese punto y en esa dirección de superficie. Si la multiplicamos por -3/4 obtendremos una cantidad igual a la que el Consejero Privado Sr. Gauss ha llamado la curvatura de una superficie. Vimos que para la determinación de las relaciones métricas de una variedad n-dimensional representable en la forma prescrita se requerían n(n-1)/2 funciones de la posición. Por lo tanto, las relaciones métricas de la variedad se podrán determinar si se dan para cada punto las curvaturas correspondientes a n(n-1)/2 direcciones de superficie, con tal que entre estos valores no haya identidades, cosa que en general no ocurre.3 Las relaciones métricas de estas variedades, en que el elemento de línea se representa por la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo orden, pueden expresarse así de una manera enteramente independiente de la elección de las cantidades variables. Es posible lograr este fin por una vía del todo análoga también en el caso de las variedades en que el elemento de línea se expresa mediante una expresión menos simple, por ejemplo, la raíz cuarta de una expresión diferencial de cuarto grado. Pero entonces el elemento de línea, en términos generales, no se dejará reducir a la forma de la raíz cuadrada de una suma de cuadrados de expresiones diferenciales y por lo tanto en la expresión del cuadrado del elemento de línea la desviación de la condición plana será una cantidad [17] infinitesimal

de segundo orden, en tanto que en las variedades arriba consideradas era una cantidad infinitesimal de cuarto orden. Esta peculiaridad de estas últimas variedades puede formularse diciendo que ellas son planas en sus partes mínimas. Para nuestro propósito, la peculiaridad más importante de estas variedades y la única razón de que las investiguemos aquí consiste en que, si tienen dos dimensiones, sus relaciones se dejan representar geométricamente mediante superficies, y si tienen más dimensiones, se las puede reducir a las de las superficies contenidas en ellas. Esto demanda una breve explicación.

3

En nuestra concepción de una superficie, con las relaciones métricas intrínsecas, en las que sólo entra en consideración la longitud de los caminos sobre ella, viene siempre a entremezclarse la colocación de la misma respecto a puntos situados fuera de ella. Pero se puede hacer abstracción de tales relaciones extrínsecas modificando la superficie de modo que la longitud de las líneas sobre ella no se altere —vale decir, doblándola de cualquier manera sin estirarla- y tratando como equivalentes a todas las superficies obtenidas así las unas de las otras. Así pues cualquier superficie cilíndrica o cónica es equivalente a un plano pues se las puede formar doblándolo, sin que se alteren las relaciones métricas intrínsecas, de modo que todas las proposiciones al respecto -o sea, toda la planimetría- conservan su validez. En cambio dichas superficies se consideran esencialmente distintas de la esfera, pues a ésta no se la puede transformar en un plano sin estirarla. Según lo que antes vimos, las relaciones métricas intrínsecas de una cantidad bidimensional cuyo elemento de línea se puede expresar como la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo grado, como ocurre con las superficies, están caracterizadas por la curvatura. En el caso de las superficies puede dársele a esta cantidad un significado intuitivo; ella es igual al producto de las dos curvaturas principales de la superficie en el punto respectivo, y multiplicada por [el área de] un triángulo infinitesimal cuyos lados son geodésicas es igual a la cantidad,4 medida en radianes, en que la suma de los ángulos [18] de ese triángulo excede los dos rectos. La primera definición presupone el teorema según el cual el producto de los dos radios de curvatura no se altera con sólo doblar una superficie; la segunda, que en un mismo lugar el exceso sobre dos rectos de la suma de los ángulos de un triángulo infinitesimal es proporcional al área del mismo. Para conferir un significado tangible a la curvatura de una variedad n-dimensional en un punto de la misma y en la dirección de una superficie que pasa por ese punto hay que tener en cuenta que cada geodésica que parte de un punto está enteramente determinada si está dada su dirección inicial. Se obtiene pues una superficie determinada si todas las direcciones iniciales que parten de un cierto punto y yacen sobre un elemento de superficie dado se prolongan en las correspondientes geodésicas. Dicha superficie tiene en el punto dado una determinada curvatura que es a la vez la curvatura de la variedad n-dimensional en ese punto y en la dada dirección de superficie.

4

Antes de proceder con la aplicación de lo dicho al espacio es preciso formular algunas consideraciones generales sobre las variedades planas, en las cuales el cuadrado del elemento de línea es representable por una suma de cuadrados de diferenciales totales.

En una variedad n-dimensional plana la curvatura es igual a cero en cada punto y en cada dirección; para determinar las relaciones métricas basta, con todo, según lo que se vio, que en cada punto la curvatura sea igual a cero en n(n-1)/2 direcciones de superficie en que las curvaturas correspondientes son independientes entre sí. Las variedades cuya curvatura es por doquier igual a cero pueden considerarse como un caso especial de las variedades cuya curvatura es constante en todas partes. El carácter común de estas variedades cuya curvatura es constante puede también [19] expresarse así: En ellas las figuras se pueden mover sin estirarlas. Pues obviamente las figuras no se podrían desplazar y rotar de cualquier manera si la curvatura no fuese la misma en cada punto y en todas direcciones. Por otra parte, la curvatura determina cabalmente las relaciones métricas de la variedad; las relaciones métricas en torno a un punto son pues en todas direcciones exactamente las mismas que en torno a cualquier otro y, por consiguiente, se pueden hacer desde él las mismas construcciones [que desde cualquier otro punto]. En consecuencia, en las variedades con curvatura constante las figuras pueden colocarse absolutamente de cualquier manera. Las relaciones métricas de estas variedades dependen sólo del valor de la curvatura. Con vistas a la representación analítica conviene anotar que, si a designa dicho valor, el elemento de línea puede expresarse en la siguiente forma:

$$\frac{1}{1+\frac{a}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2}$$

Sirva como ilustración geométrica la consideración de las superficies de curvatura constante. Es fácil de ver que las superficies cuya curvatura es positiva siempre se pueden aplicar sobre una esfera cuyo radio es igual a uno dividido por la raíz cuadrada de la curvatura. Para comprender toda la variedad de estas superficies désele a una de ellas la forma de una esfera y a las demás la forma de superficies de revolución que la tocan en el ecuador. Las superficies de curvatura mayor que nuestra esfera tocarán a la esfera por dentro y adoptarán la forma de la parte exterior (más alejada del eje) de la superficie de un anillo. Estas superficies se podrían aplicar sobre zonas de esferas de radio menor, pero envolviéndolas más de una vez. Las superficies de curvatura positiva menor se obtienen [20] recortando en una superficie esférica de radio mayor un trozo limitado por dos semicírculos máximos y haciendo coincidir los cortes. La superficie de curvatura cero será una superficie cilíndrica que pasa por el ecuador. Las superficies de curvatura negativa tocarán ese cilindro por fuera y serán como la parte interior (más próxima al eje) de la superficie de un anillo. Si se concibe a esas superficies como el lugar en que se mueven trozos de superficie -al modo como el espacio es el lugar de los cuerpos— resulta que en todas ellas los trozos de superficie se pueden mover sin sufrir estiramientos. A las superficies de curvatura positiva puede dárseles siempre una forma tal que los trozos de superficie puedan moverse de cualquier manera también sin doblarse, a saber, la forma de una superficie esférica. No así, empero, a las de curvatura negativa. En la superficie de curvatura cero, además de la susodicha independencia de los trozos de superficie relativamente a su posición, hallamos que las direcciones son independientes de la posición, lo cual no ocurre en las demás superficies.

III. Aplicación al Espacio

1

Tras estas investigaciones sobre la determinación de las relaciones métricas de una cantidad *n*-dimensional es posible indicar las condiciones necesarias y suficientes para determinar las relaciones métricas del espacio, en el supuesto de que las líneas son independientes de su colocación y que el elemento de línea puede representarse mediante la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo orden, vale decir, en el supuesto de que el espacio es plano en sus partes mínimas.

En primer lugar, se las puede expresar de suerte que la curvatura en cada punto sea igual a cero en tres direcciones de superficie. Por lo tanto, las relaciones métricas del espacio están determinadas si la suma de los ángulos de un triángulo es en todas partes igual a dos rectos.

En segundo lugar, si se presupone con Euclides que no sólo las líneas sino también los cuerpos tienen una existencia independiente de su colocación, [21] resulta que la curvatura es constante en todas partes. Entonces la suma de los ángulos está determinada en todos los

triángulos si está determinada en uno de ellos.

En tercer lugar, por último, en vez de suponer que la longitud de las líneas es independiente de la posición y la dirección, podemos presuponer que su lugar y su dirección son independientes de su posición. Según esta concepción los cambios de posición o las diferencias de posición son cantidades complejas expresables en términos de tres unidades independientes.

2

En el curso de las consideraciones precedentes distinguimos al comienzo las relaciones extensivas o regionales de las relaciones métricas y hallamos que es posible asociar diversas relaciones métricas a unas mismas relaciones extensivas. Se investigaron los sistemas de determinaciones métricas simples que fijan completamente las relaciones métricas del espacio y de las cuales son una consecuencia necesaria todas las proposiciones acerca de estas últimas. Nos resta sólo examinar en qué grado y con qué amplitud la experiencia es fiadora de nuestros supuestos. En este respecto hay una diferencia esencial entre las relaciones meramente extensivas y las relaciones métricas, ya que en el caso de las primeras, cuyas posibles alternativas constituyen una variedad discreta, las aseveraciones de la experiencia, aunque nunca enteramente seguras, no son imprecisas, mientras que en el caso de las últimas, cuyas alternativas posibles constituyen una variedad continua, toda determinación empírica será siempre imprecisa -por grande que fuere la probabilidad de que ella sea proximadamente correcta. Esta circunstancia se torna importante al extenderse tales determinaciones empíricas más allá de los límites de la observación, en dirección de lo inconmensurablemente grande y de lo inconmesurablemente pequeño; pues evidentemente, más allá de los límites de la observación, las últimas pueden volverse cada vez más imprecisas, pero no así las primeras.

Al extender las construcciones espaciales a lo inconmesurablemente grande hay que distinguir entre lo ilimitado y lo infinito. El

primer predicado concierne a las relaciones extensivas, el segundo a las métricas. Que el [22] espacio es una variedad tridimensional ilimitada es un supuesto aplicado cada vez que se concibe el mundo externo completando en todo momento el campo de las percepciones actuales y construyendo las posiciones posibles de un objeto buscado, y que además se confirma constantemente a través de tales aplicaciones. El carácter ilimitado del espacio tiene pues una mayor certeza empírica que ninguna experiencia externa. Pero de esto no se infiere en modo alguno su infinitud. Antes bien, si se supone que los cuerpos son independientes de la posición, y se atribuye así una curvatura constante al espacio, éste será necesariamente finito si dicha curvatura tiene un valor positivo, por pequeño que éste sea. En tal caso, al prolongar mediante geodésicas las direcciones iniciales pertenecientes a un elemento de superficie, se obtendría una superficie ilimitada con curvatura positiva constante, o sea, una superficie que en una variedad tridimensional plana toma la forma de una superficie esférica y que por lo tanto es finita.

3

Para la explicación de la naturaleza, las cuestiones concernientes a lo inconmensurablemente grande son cuestiones ociosas. No así en cambio las cuestiones concernientes a lo inconmensurablemente pequeño. De la precisión con que perseguimos los fenómenos hasta lo infinitamente pequeño depende esencialmente el conocimiento de su interconexión causal. Los progresos de los últimos siglos en el conocimiento de la naturaleza mecánica se deben casi exclusivamente a la precisión en la construcción que se ha vuelto posible gracias a la invención del análisis del infinito y a los simples conceptos fundamentales descubiertos por Arquímedes, Galileo y Newton, de los cuales se vale la física actual. En cambio en las ciencias naturales en que faltan aún los conceptos fundamentales simples para tales construcciones se persigue a los fenómenos en lo espacialmente pequeño, a fin de conocer su interconexión causal, sólo hasta donde lo permite el microscopio. Las cuestiones relativas a las relaciones métricas del espacio en lo inconmensurablemente pequeño no pertenecen pues al género de las cuestiones ociosas.

Si se presupone que los cuerpos existen independientemente de su posición, la curvatura es constante en todas partes y se infiere entonces de las mediciones astronómicas que no puede ser distinta de cero: [23] en todo caso, su valor recíproco tendría que ser igual a un área comparada con la cual la región accesible a nuestros telescopios sería desdeñable. Pero si los cuerpos no son independientes de su posición no es posible inferir de las relaciones métricas en lo grande⁶ nada concerniente a las relaciones métricas en lo infinitamente pequeño. En cada punto la curvatura en tres direcciones puede tener un valor arbitario, con tal de que la curvatura total de cada parte mensurable del espacio no difiera apreciablemente de cero. Pueden darse situaciones aún más complicadas si, contra lo que hemos supuesto, el elemento de línea no puede representarse mediante la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo grado. Ahora bien, los conceptos empíricos en que se basan las determinaciones métricas del espacio, a saber, los conceptos de cuerpo sólido y de rayo de luz, pierden al parecer su validez en lo infinitamente pequeño. Cabe pensar por lo tanto, que las relaciones métricas del espacio en lo infinitamente pequeño no se ajustan a los supuestos de la geometría, y esto es algo que, en efecto, sería forzoso admitir en cuanto ello permitiese explicar los fenómenos de manera más simple.

La cuestión de la validez de los supuestos de la geometría en lo infinitamente pequeño está vinculada pues a la cuestión del fundamento intrínseco de las relaciones métricas del espacio. A propósito de esta cuestión, que todavía puede considerarse comprendida en la teoría del espacio, resulta pertinente la observación que hicimos de que en una variedad discreta el principio de las relaciones métricas está comprendido en el concepto mismo de dicha variedad, pero a una variedad continua debe advenirle de otra parte. Por consiguiente, o bien lo real subyacente al espacio constituye una variedad discreta, o bien hay que buscar el fundamento de las relaciones

métricas afuera, en fuerzas enlazantes que actúen sobre ello.

[24] Sólo puede hallarse una solución de estas cuestiones si se parte de la concepción corriente de los fenómenos, fundada por Newton y corroborada por la experiencia, y se la modifica poco a poco bajo la presión de hechos que ella no permita explicar. Investigaciones como la aquí desarrollada, que parten de nociones generales, sólo pueden servir para que esa labor no se vea impedida por la estrechez de los conceptos y para que el progreso en el conocimiento de la interconexión de las cosas no sea obstaculizado por prejuicios tradicionales.

Esto nos conduce al dominio de otra ciencia, al dominio de la física, en el cual la índole de la presente ocasión no nos permite

The Little Land of the Control of th

penetrar.

Plan de la investigación

I. Concepto de una cantidad n-dimensionala

 Variedades continuas y discretas. Las partes determinadas de una variedad se llaman cuantos. División de la teoría de las cantidades continuas en

 la teoría de las meras relaciones regionales, que no presupone que las cantidades sean independientes de la posición,

2) la teoría de las relaciones métricas, que tiene que

presuponer tal independencia.

2. Generación del concepto de una variedad uni-, bi-, n-dimensional.

- La determinación de la posición en una variedad dada reducida a determinaciones cuantitativas. Característica esencial de una variedad n-dimensional.
- II. Relaciones métricas que admite una variedad de n dimensiones b bajo el supuesto de que las líneas tienen una longitud independiente de su colocación y por consiguiente cada línea puede ser medida por cualquier otra línea.

 Expresión del elemento de línea. Se consideran planas las variedades en que el elemento de línea puede expresarse mediante la raíz de una suma cuadrática de diferenciales

totales.

2. Investigación de las variedades n-dimensionales en que el elemento de línea puede representarse mediante una expresión diferencial de segundo grado. Medida de cuánto se desvía de la condición plana en un punto dado y en una dada dirección de superficie (curvatura). Para la determinación de sus relaciones métricas es admisible y suficiente (bajo ciertas condiciones restrictivas) fijar arbitrariamente la curvatura en cada punto en n(n-1)/2 direcciones de superficie.

Explicación geométrica.

4. Las variedades planas (en las cuales la curvatura es igual a cero en todas partes) pueden considerarse como un caso

a El Art. I constituye a la vez un trabajo preliminar para contribuciones a la topología.

b La investigación sobre las posibles determinaciones métricas de una variedad n-dimensional es muy incompleta, pero basta para el presente propósito.

particular de las variedades con curvatura constante. Estas pueden también definirse por la circunstancia de que en ellas las cantidades n-dimensionales son independientes de la posición (pueden moverse sin sufrir estiramientos).

5. Superficies de curvatura constante.

III. Aplicación al espacio.

 Sistemas de hechos suficientes para la determinación de las relaciones métricas del espacio presupuesta por la geometría.

- 2. ¿En qué medida es probable la validez de tales determinaciones empíricas más allá de los límites de la observación, en lo inconmensurablemente grande?
- 3. ¿Y en lo inconmensurablemente pequeño? Conexión de este problema con la explicación de la naturaleza.c

Notas del Traductor

c El § 3 del Art. III requiere una revisión y mayor elaboración.

¹ La conferencia Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen, leida por Riemann ante la Facultad de Filosofía de Göttingen en cumplimiento de uno de los requisitos para obtener la venia legendi y publicada póstumamente en 1867 por Dedekind en el volumen 13 de las Abhandlugen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, en 1867, constituye la primera expresión de la nueva concepción del espacio y la geometría que, debido principalmente al impacto de la teoría de la gravitación de Einstein, domina el debate filosófico sobre estos temas en el siglo XX. Lamento no poder dar aquí una explicación de este importantísimo pero difícil escrito (lo he intentado en el capítulo II de mi Filosofía Moderna de la Geometría, en preparación). Las notas que siguen se refieren sólo a unos pocos puntos en que me pareció que una aclaración era imprescindible. El lector interesado hallará un excelente comentario matemático de la conferencia de Riemann en Michael Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. II (Boston: Publish or Perish, 1970). Si lee alemán, puede recurrir también a la edición anotada que publicó Hermann Weyl en 1919 (reproducida por la Chelsea Publishing Co. de Nueva York en el tomo titulado Das Kontinuum und andere Monographien). Mi traducción se basa en la edición original, reproducida fotomecánicamente por la Wissenschaftliche Buchgesellschaft de Darmstadt en 1959. Los números entre corchetes indican las páginas de esa edición. Doy al final de las notas una lista de expresiones peculiares con su equivalente en el alemán de Riemann.

² La experiencia no podría ayudarnos a descubrir las propiedades métricas que distinguen al espacio entre las cantidades tridimensionales si el espacio fuese indeterminado en este respecto o "métricamente amorfo". Por esta razón no puedo aceptar la interpretación de Riemann propuesta por Adolf Grünbaum (Philosophical Problems of Space and Time, Dordrecht: Reidel, 1973, pp. 8 y ss.), ni puedo considerarlo como un precursor de la filosofía convencionalista del espacio y la geometría propugnada por este último autor. Una cosa es sostener que el concepto genérico del que nuestro espacio físico es una especie no envuelve una métrica determinada y otra muy distinta es afirmar que tal métrica

no es una propiedad estructural del espacio físico. En un pasaje muy citado (vide supra, p.164), Riemann dice que si el espacio físico es una variedad continua no pueden derivarse sus propiedades métricas de su concepto mismo sino que ha de buscarse el fundamento de ellas en las fuerzas que enlazan la realidad que lo constituye. Pero esto no implica que la métrica así fundada sea convencional,

sino justamente que es natural.

³ Para entender este difícil pero decisivo pasaje conviene tener presente lo que sigue. Si P es un punto cualquiera de una variedad diferenciable V, se puede siempre aplicar difeomórficamente un entorno del vector cero en el espacio tangente a V en P sobre un entorno de P en V asignando a cada vector a tangente a V en P un punto A de V determinado así: (i) A se halla sobre una geodésica que pasa por P y a la cual a es tangente; (ii) la longitud de la geodésica entre P y A es igual a la longitud del vector a. Sean a y b dos vectores de longitud 1, linealmente independientes, tangentes a V en P; a y b determinan lo que Riemann llama una "dirección de superficie", que podemos concebir como el producto vectorial de a y b. El difeomorfismo descrito aplica un entorno del vector cero en el plano generado por a y b sobre una superficie —una subvariedad bidimensional de V— que pasa por P. La curvatura gaussiana de esta superficie en P es "la curvatura correspondiente a la dirección de superficie" determinada por a y b. El tensor covariante de Riemann —cuyo origen se remonta a la memoria presentada por éste a un concurso de la Academia de París en 1861- asigna a cada punto P de V una función cuadrilineal Rp sobre el espacio tangente a V en P. "La curvatura correspondiente a la dirección de superficie" determinada por a y b es igual a $R_p(a,b,a,b)$.

⁴ El original dice "la mitad de la cantidad" (dem halben Ueberschusse). Se trata sin duda de un error que, por lo demás, Hermann Weyl ha corregido en su

edición, p. 13.

geodésica

⁵ Esta aseveración de Riemann no vale con toda generalidad. Véase R. Kulkarni, "Curvature and Metric", Annals of Mathematics, 91 (1970) 311.

6 Im Grossen. Hoy día, hablando de geometría diferencial, esta expresión alemana equivale a nuestro adjetivo global. Pero en este pasaje de Riemann me parece preferible una traducción literal.

7 Este sumario aparece en la edición original, igual que aquí, después del texto de la conferencia. Las notas que lo acompañan sugieren que Riemann mismo lo redactó.

Glosario

Cantidad multidimensional
Concepto general de cantidad
Colocación
Cuanto
Curvatura
Curvaturas principales de la superficie
Curvatura total
determinaciones métricas
dirección de superficie
especificación
función de la posición
(hoy se diría campo escalar)

mehrfach ausgedehnte Grösse Allgemeiner Grössenbegriff Lage Quantum Krümmungsmass Krümmungen der Fläche ganze Krümmung Maassbestimmungen Flächenrichtung Bestimmungsweise

Funktion de Orts kürzeste Linie inconmensurablemente pequeño infinitamente pequeño

Unmessbarkleine* Unendlichkleine*

(*visiblemente Riemann usa estas dos expresiones como sinónimos)

plano plana, condición o índole posición relaciones extensivas relaciones métricas topología variabilidad

variedad

eben Ebenheit Ort Ausdehnungsverhältnisse

Maassverhältnisse Analysis situs Veränderlichkeit Mannigfaltigkeit

MILES TORK IN A VINE THE STATE OF LIFE