SOBRE LA LEY DE LA INERCIA
(1885)

LUDWIG LANGE

(Traducción del alemán por Roberto Torretti)

Advertencia del Traductor. El trabajo que damos aquí en versión castellana apareció originalmente bajo el título "Ueber das Beharrungsgesetz" en los *Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematische-physikalische Klasse*, vol. 37 (1885), pp.333-351. Doy al margen la paginación del original. Como el propio autor explica en la sección I, su propósito es formular el contenido físico del primer principio de la mecánica sin recurrir a los cuestionables conceptos newtonianos de un espacio y un tiempo absolutos. Lange se refiere brevemente en la sección I y con más detalle en la sección III a los escritos de Carl Neumann, Ernst Mach y otros autores que habían buscado satisfacer el mismo propósito en los años inmediatamente precedentes. La idea central de Lange se expresa en el enunciado del Principio de Inercia que destacamos tipográficamente en la p.158. Se distingue allí nítidamente entre el contenido físico del Principio (los dos teoremas) y el marco convencional requerido para hacerlo inteligible (las dos definiciones). En su clásico tratado de Teoría de la Relatividad observa Max von Laue que los teoremas de Lange son proposiciones empíricas y agrega: "El sistema inercial y la escala inercial de tiempo no son pues, de ninguna manera, unos esquemas vacíos —como se los describe a veces en la literatura— sino realidades físicas, que deben inferirse de la observación. Haber reemplazado con ellos al espacio y al tiempo absolutos de Newton, con justicia calificados como 'algo fantasmales', fue la gran obra de Ludwig Lange" (Laue, *Die Relativitätstheorie*, Bd. I, 6a edición, Braunschweig: Vieweg, 1955, p.3). Laue agrega enseguida que Lange presupone, por cierto, la existencia del espacio euclidiano, con sus rectas infinitas, y no se

Diálogos, 34 (1979), pp.153-170

hace problemas sobre la posibilidad de transferir la escala de tiempo de un lugar a otro. El cuestionamiento de estos supuestos iniciado pocos años más tarde por Henri Poincaré, desempeña, como se sabe, un papel decisivo en el pensamiento revolucionario de Einstein. El trabajo del propio Lange a que se refiere la nota 4 se titula "Ueber die wissenschaftliche Fassung der Galilei'schen Beharrungsgesetzes" ("Sobre la formulación científica de la ley galileana de la inercia"). En la misma revista de W. Wundt mencionada en esa nota publicó Lange en el vol. III, correspondiente a 1886, un extenso y excelente estudio sobre el desarrollo histórico del concepto de movimiento del que hay también una edición separada, enriquecida con dos apéndices (Ludwig Lange, *Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebnis; Ein Beitrag zur historischen Kritik der mechanischen Principien*, Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1886, x + 141pp.)

I

En una investigación metódica de los principios dinámicos encaramos como primer y supremo problema la tarea de reemplazar la versión galileo-newtoniana de la ley de la inercia, en muchos respectos anticuada, por una versión nueva, ajustada a los tiempos. Desde que Carl Neumann[1] y Ernst Mach[2] demostraron persuasivamente la insuficiencia de aquella formulación tradicional, no cabe duda de que ésta no es una necesidad ficticia sino una necesidad efectiva y enteramente justificada de la ciencia. Recientemente Streintz[3] ha tenido el mérito de señalar una vez más la importancia sobresaliente del citado problema. Yo mismo he tratado el asunto en otro sitio, sobre todo desde un punto de vista metodológico,[4] y voy a considerar aquí con más detalle su aspecto físico-matemático.

La insuficiencia de la formulación habitual de la ley de la inercia proveniente de Newton consiste ante todo en que no se dice con respecto a qué sistema de coordenadas los movimientos de las partículas libres son rectilíneos, ni con respecto a qué escala de tiempo *(vide infra)* son uniformes. Se dice sólo: "son rectilíneos" y "son uniformes". Pero ¿con respecto a qué son rectilíneos? para

---

[1] *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie.* Leipzig 1870.

[2] *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit.* Prag 1872, p.47.

[3] *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik.* Leipzig 1883.

[4] *Philosophische Studien*, editados por W. Wundt (en lo sucesivo: *Ph.St.)* vol. II, pp.266-297.

prescindir por ahora de la segunda aseveración. No es necesario analizar en detalle las dificultades universalmente conocidas, que se oponen a una respuesta a esta pregunta. Ningún objeto material dado en el universo se presta para servir de término de referencia de la ley de la inercia en todos los casos.[5] En particular una mecánica gravitacional de las estrellas fijas no dispondría de nada, en todo el ancho mundo, a lo que pudiera referir los movimientos de las partículas libres (puramente pensadas) y de las estrellas fijas. Lo mismo vale para la dinámica molecular, esta microastronomía.

Newton calla la respuesta a nuestra pregunta en la formulación de la ley misma que antepone a su teoría de la gravitación;[6] pero no la queda debiendo. Con arreglo a sus explicaciones, él refiere la ley a un cierto sistema de coordenadas, que llama el espacio "absoluto, homogéneo, infinito e inmóvil". Este "espacio absoluto" existe en realidad y no meramente en la idea, pero por cierto no es accesible a nuestra imperfecta percepción sensorial humana. Ha de consistir en una ordenación mutua de puntos absolutamente fijos inconocibles; y los lugares y movimientos locales de los cuerpos han de conocerse en su constitución real sólo por comparación con estos puntos fijos "en sí y para sí", no por comparación con otros objetos materiales.[7] En suma, el espacio absoluto de Newton es un fantasma que de ninguna manera puede convertirse en el fundamento de una ciencia exacta. No sería difícil probar que la suposición de un espacio absoluto por Newton no ha sido independiente de su profunda visión religiosa del mundo. El coloca tanto al espacio absoluto como al "tiempo absoluto" *(vide infra)*[8] en la más íntima relación con Dios omnipresente y eterno, y justamente en esa relación ve por otra parte una garantía de la certeza de esas entidades absolutas, en contraste con sus imágenes relativas, el espacio sensible y el tiempo sensible, que a menudo inducen a engaño. Ya Euler[9] osó sacudir el

---

5 Cf. Neumann, ibid., p.14s.; Mach, ibid., pp.47-50.

6 *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Amstaelodami 1714, 2a ed., p.12, Lex I.

7 Loc.cit., pp.5-11. Scholium ad definitiones.

8 Cf. Newton, *Optice*, 1740 (versión latina), p.298, así como el escolio final de la segunda y la tercera edición de los *Principios* (1714, pp.481 ss.), donde se dice, entre otras cosas, que "Dios existe eternamente y en todo lugar y crea el tiempo y el espacio justamente en virtud de su eternidad y omnipresencia". No cabe duda de que se refiere al tiempo absoluto y al espacio absoluto, cosa que confirma plenamente el empleo de la palabra *duratio* en lugar de *tempus*. Pues en otra parte se dice expresamente, hablando del tiempo absoluto en contraste con el relativo: "Alio nomine dicitur duratio '. (Loc.cit., p.5)

9 *Theoria motus* (1765), tomo I, cap. I. Como Euler no posee el fundamento religioso metafísico de Newton, no tiene escrúpulos en reprochar

fundamento de la dinámica propuesto por Newton, y Kant arrojó enteramente por la borda el espacio absoluto *real.*[10] Es verdad que no se conocía nada realmente mejor para poner en su lugar, y por eso ocurre que el físico y matemático aún hasta el día de hoy —aunque no sin incomodidad— suele hablar del espacio absoluto, de puntos absolutamente fijos, de movimientos absolutos, porque no tiene ningún sustituto irrecusable de estas cuestionables ficciones. *En lo que sigue se trata justamente de encontrar un tal sustituto irrecusable.*

Pero antes será oportuno considerar la ya mencionada suposición newtoniana de un "tiempo absoluto". Como es sabido, toda medición del tiempo se basa en el movimiento; se mide el tiempo por el camino recorrido por un punto (extremo de la manecilla de un reloj, estrella fija). El punto en movimiento brinda en cierto modo una "escala de tiempo" ["*Zeitscala*"] en la cual ordenamos los sucesos. Juzgar las relaciones temporales de un movimiento dado significa compararlas espacialmente con otro movimiento adoptado como cartabón de una vez por todas. Pero ¿qué clase de movimiento, qué clase de escala de tiempo ha de adoptarse como base de la cronometría dinámica? Como es sabido, surgen a este respecto dificultades muy parecidas a las que ya encontramos al preguntar por el sistema de referencia fundamental de la dinámica. Si uno se atiene con todo rigor a la teoría, ningún movimiento dado en el universo sirve para ese propósito.[11] Sabedor de esto, Newton refirió las proposiciones sobre el movimiento de sus teorías dinámicas, y en particular el principio de la velocidad invariable de las partículas libres, a un "tiempo absoluto" que, imperceptible para nosotros los hombres, "fluye parejamente en sí y por sí".[12] Apenas si hace falta señalar que este tiempo absoluto es un fantasma, tal como el espacio absoluto. Justamente por eso es muy notable que en buena medida haya desaparecido de la mecánica actual, mientras que de ningún modo puede decirse lo mismo del espacio absoluto. Con todo, la explicación de este hecho no es nada recóndita. Ya se posee un

---

ininteligibilidad a los postulados newtonianos. En el cap. II retorna, con todo, a las opiniones newtonianas, para evitar "ininteligibilidades' aún mayores. Cf. Streintz, loc.cit., pp.40ss.

[10] A saber, en su período crítico, no sólo se desvanece para Kant el espacio real absoluto de Newton, convirtiéndose en una pura idea, sino que esta idea misma no tiene la más mínima coloración dinámica, de modo que resta poco más que la palabra vacía. Kant, *Werke*, ed. por Kirschmann, tomo VII, sección I, p.194.

[11] Newton, *Principia*, p.7. Neumann, loc.cit., pp.16s.

[12] Newton, loc.cit., p.5.

sustituto perfectamente válido del tiempo absoluto. Podemos formular la parte temporal de la ley de inercia de modo perfectamente correcto sin el postulado de un tiempo absoluto. Basta fundar, siguiendo a Neumann, la medida del tiempo propia de la dinámica sobre esta definición: Dos lapsos de tiempo se dicen iguales si en ellos *una partícula libre* recorre tramos iguales.[13] Visto desde esta perspectiva, el principio del movimiento "uniforme" de todas las partículas libres aparece —según observan con mucha justeza Thomson y Tait— como una *mera convención* para una partícula tal, y es más que convención, es un resultado científico, sólo en la medida en que concierne a *cualquier otra* partícula libre.[14] Manifiestamente, aquello de que Neumann se ha valido para sacar el incomprensible tiempo absoluto del enunciado de la ley de la inercia no es más que un peculiar proceso de *eliminación.*

Cabe preguntar, entonces, si el espacio absoluto no se puede eliminar también mediante un procedimiento análogo. Tal es el caso en verdad. Llámese "sistema inercial" al sistema fundamental de coordenadas de la dinámica, y "escala inercial de tiempo" a la escala fundamental de tiempo de la dinámica. Entonces, del mismo modo que se puede definir la escala inercial de tiempo unidimensional a base de una sola partícula libre, así también puede definirse el sistema inercial tridimensional a base de tres partículas libres. A esta definición nos conduce la reflexión siguiente, cuyas premisas cinemáticas habrán de fundamentarse luego.

Dadas tres (o menos de tres) partículas no necesariamente libres, P', P'' y P''' que se mueven arbitrariamente unas respecto a otras, siempre es posible construir un sistema de coordenadas, y aun infinitos sistemas de coordenadas, con referencia a los cuales esas partículas se mueven en línea recta. En cambio, si se dan más de tres partículas esta posibilidad sólo existe en circunstancias especiales, sólo accidentalmente.

Se sigue de ello que la ley de la dirección invariable del movimiento de las partículas libres es, para tres partículas tales una *mera convención*, y sólo contiene un resultado científico digno de atención en cuanto vale para más de tres partículas, para cualquier número de partículas, con referencia a uno y el mismo sistema. La condición *física* de la ausencia de influencia externa tiene la muy notable consecuencia *cinemática* de que para cualquier número de

---

[13] Neumann, loc.cit., p.18.

[14] Thomson-Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, part I, § 246-248.

partículas que satisfagan esa condición hay un sistema de coordenadas en que todas ellas se mueven en línea recta.

Con esto está dada en sus rasgos principales la definición buscada de sistema inercial. Así como la escala inercial de tiempo puede definirse como una escala de tiempo tal que *una* partícula libre referida a ella avanza uniformemente, así también el sistema inercial se podrá definir como un sistema de coordenadas tal que *tres* partículas libres referidas a él avanzan en línea recta. Persiguiendo este pensamiento se obtiene de hecho, por una vía que hemos de recorrer en la próxima sección, la siguiente versión analítica completa de la ley de la inercia.

Ley de la Inercia

Definición I. "Sistema inercial" se llama todo sistema de coordenadas tal que, con referencia a él, tres partículas P, P´ y P´´, proyectadas desde el mismo punto del espacio y luego dejadas en libertad —pero que no están situadas en una misma recta— se mueven sobre tres rectas cualesquiera, G, G´ y G´´, concurrentes en un punto (vgr. sobre los ejes del sistema de coordenadas).

Teorema I. Referida a un sistema inercial, la trayectoria de una cuarta partícula libre cualquiera también es rectilínea.[15]

Definición II. "Escala inercial de tiempo" se llama toda escala de tiempo tal que, con referencia a ella, *una* partícula libre referida a un sistema inercial se mueve uniformemente.

Teorema II. Referida a una escala inercial de tiempo, cualquier otra partícula libre se mueve uniformemente en su trayectoria inercial.[16]

---

[15] La definición que doy aquí difiere de la que propuse en mi trabajo anterior, no en cuanto a la idea metodológica básica, sino en cuanto a su ejecución matemática. El profesor A. Voss tuvo la amabilidad de señalarme un error cinemático, estimulándome así a este segundo ensayo más matemático.

[16] Se ve que la parte espacial y la parte temporal de la ley repiten aproximadamente lo mismo, una vez con vistas al espacio tridimensional y la otra con vistas al tiempo unidimensional. El peculiar procedimiento de eliminación en que esta analogía se expresa más llamativamente, lo he designado (loc.cit.) con un término especial —Principio de la determinación particular— porque se vio que aclara muchos puntos oscuros en la mecánica y la física matemática en general. En efecto arroja una luz clarísima sobre una serie de teorías básicas coordinadas en cierto modo con la ley de la inercia, por ejemplo, el principio de la proporcionalidad de la fuerza y su efecto, la ley de Ohm, etc.

II

Se trata, por de pronto, de exponer exactamente en qué medida se puede construir, para uno, dos o tres, pero en general para no más de tres puntos en recíproco movimiento, un sistema de coordenadas con referencia al cual los puntos se muevan en línea recta. No hablamos aún de partículas materiales libres, sino de puntos geométricos móviles.

1. Sean P, P′, P″, ... un número cualquiera de tales puntos que, con referencia a un sistema completamente arbitrario de coordenadas paralelas ΞHZ y a una escala de tiempo también completamente arbitraria 0 . . . . t, poseen las coordenadas $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'; \xi'', \eta'', \zeta''$. . . . dadas como funciones de t. Sea X_1 X_2 X_3 otro sistema de coordenadas paralelas que se mueve de algún modo con respecto a ΞHZ. Como es sabido, en tal caso las coordenadas de los puntos con referencia al segundo sistema se obtienen mediante transformaciones de la forma:

$$
\begin{aligned}
x_i &= a_i\xi + \beta_i\eta + \gamma_i\zeta + \delta_i \\
x_i' &= a_i\xi' + \beta_i\eta' + \gamma_i\zeta' + \delta_i \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\qquad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

donde a_i, β_i, γ_i, δ_i son doce funciones de t. Si se supone que las coordenadas son ortogonales, las a_i, β_i, γ_i satisfacen las seis ecuaciones independientes:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1 \\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \\
\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0 \\
\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 &= 0 \\
a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Nos preguntamos entonces: ¿Para cuántos puntos dados es posible, sin presuponer relaciones especiales de dependencia entre sus coordenadas variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. determinar a las a_i, β_i, γ_i, δ_i como tales funciones de t, que las trayectorias descritas por todos esos puntos con respecto al sistema $X_1 X_2 X_3$ sean rectilíneas? Salta inmediatamente a la vista que dicha posibilidad tiene que cesar cuando se alcanza un cierto número de puntos.

De la exigencia de que se mueva en línea recta con referencia al sistema $X_1 X_2 X_3$ resultan para cada punto dos ecuaciones diferen-

ciales; por ejemplo, para el punto P, las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} = 0, \qquad \frac{d^2 x_3}{dx_1^2} = 0$$

que, luego de la transformación a ΞHZ y la introducción del argumento t, son de segundo orden en las doce incógnitas a_i, β_i, γ_i, δ_i. Para n puntos esto da $2n$ ecuaciones diferenciales que junto con las condiciones de ortogonalidad (1) constituyen un sistema de $2n + 6$ ecuaciones. Mientras $n \leqslant 3$ el número de las ecuaciones que han de satisfacerse no excede el número de las incógnitas. Lo excede, en cambio, si $n > 3$, en cuyo caso no hay una solución del problema a menos que se supongan relaciones especiales de dependencia entre las $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'; \xi'', \eta'', \zeta'', \ldots$.

En el caso de tres puntos dados es justamente *todavía* posible, sin ulteriores supuestos, construir un sistema con respecto al cual todos ellos se muevan en línea recta. Pero no sólo uno, sino ∞ sistemas, pues, como se puede ver, tenemos que habérnoslas con 12 constantes de integración *arbitrarias.* Ahora bien, según principios conocidos $\infty^{12} = (\infty^4)^3$ es también la variedad de todas las combinaciones posibles de tres rectas distintas en el espacio. Esto sugiere que, mediante una elección apropiada de aquellas constantes, pueden obtenerse como trayectorias de P, P′ y P″, tres rectas arbitrariamente *prescritas.* El problema planteado así, también se puede formular y resolver de manera puramente algebraica como sigue.

2. La exigencia de que P, P′ y P″, describan con referencia a $X_1 X_2 X_3$ tres trayectorias rectilíneas conduce a las nueve ecuaciones algebraicas ($i = 1,2,3$):

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_i &= a_i\xi + \beta_i\eta + \gamma_i\zeta + \delta_i = a_i + b_i\varphi(t) \\ x'_i &= a_i\xi' + \beta_i\eta' + \gamma_i\zeta' + \delta_i = a'_i + b'_i\varphi'(t) \\ x''_i &= a_i\xi'' + \beta_i\eta'' + \gamma_i\zeta'' + \delta_i = a''_i + b''_i\varphi''(t) \end{aligned}$$

donde los valores a y b son los factores independientes de t determinantes de las trayectorias prescritas, en tanto que los parámetros $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ y $\varphi''(t)$ se agregan, como funciones incógnitas del tiempo, a las doce incógnitas a_i, β_i, γ_i, δ_i. El sistema (2) forma con el sistema (1) de las condiciones independientes de ortogonalidad (p.159) un sistema de 15 ecuaciones, que permite determinar las 15 funciones incógnitas de t si las antiguas coordenadas, $\xi\eta\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi''\eta''\zeta''$, están dadas, según se supuso, como funciones de t. La solución efectiva nos da la respuesta a la pregunta: ¿Cómo ha de moverse el sistema de coordenadas $X_1 X_2 X_3$ relativamente a ΞHZ para que las trayectorias de los puntos P, P′ y P″ sean tres *rectas prescritas* con referencia al primero? La respuesta puede ser en

ciertos casos infinitamente ambigua. Veremos enseguida qué condiciones se requieren para que no lo sea.

Si estipulamos que*

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = \Delta$$

se deduce del sistema (2) que:

$$\Delta a_i = \begin{vmatrix} a_i + b_i\varphi - \delta_i & \eta & \zeta \\ a'_i + b'_i\varphi' - \delta_i & \eta' & \zeta' \\ a''_i + b''_i\varphi'' - \delta_i & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}$$

$$(3) \qquad \Delta\beta_i = \begin{vmatrix} \xi & a_i + b_i\varphi - \delta_i & \zeta \\ \xi' & a'_i + b'_i\varphi' - \delta_i & \zeta' \\ \xi'' & a''_i + b''_i\varphi'' - \delta_i & \zeta'' \end{vmatrix}$$

$$\Delta\gamma_i = \begin{vmatrix} \xi & \zeta & a_i + b_i\varphi - \delta_i \\ \xi' & \zeta' & a'_i + b'_i\varphi - \delta_i \\ \xi'' & \zeta'' & a''_i + b''_i\varphi'' - \delta_i \end{vmatrix}$$

Ahora multiplicamos cada una de las seis condiciones de ortogonalidad por Δ^2:

$$(4) \qquad \begin{array}{l} (\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2 + (\Delta a_3)^2 = \Delta^2 \\ (\Delta\beta_1)^2 + (\Delta\beta_2)^2 + (\Delta\beta_3)^2 = \Delta^2 \\ (\Delta\gamma_1)^2 + (\Delta\gamma_2)^2 + (\Delta\gamma_3)^2 = \Delta^2 \\ (\Delta\beta_1)(\Delta\gamma_1) + (\Delta\beta_2)(\Delta\gamma_2) + (\Delta\beta_3)(\Delta\gamma_3) = 0 \\ (\Delta\gamma_1)(\Delta a_1) + (\Delta\gamma_2)(\Delta a_2) + (\Delta\gamma_3)(\Delta a_3) = 0 \\ (\Delta a_1)(\Delta\beta_1) + (\Delta a_2)(\Delta\beta_2) + (\Delta a_3)(\Delta\beta_3) = 0 \end{array}$$

Si se introducen en (4) los miembros de la derecha de las ecuaciones (3) resulta un sistema de seis ecuaciones con sólo las seis incógnitas δ_1 δ_2, δ_3, φ, φ' y φ''. Habría que investigar más este sistema resolvente, sobre todo con vistas a establecer las condiciones en que su solución es infinitamente ambigua. Por el momento, dejemos esta cuestión pendiente. En todo caso, de lo dicho se desprende la desigualdad

$$\Delta \neq 0$$

como una primera condición *necesaria* para que el sistema de coordenadas $X_1X_2X_3$ que satisface la exigencia prescrita no sea

* En el original, figura ξ en vez de ζ en la última columna del determinante, y la última línea aparece en el orden $\zeta''\xi''\eta''$. Se trata sin duda de un error de imprenta. (N de T.)

indeterminado. Esta desigualdad implica inmediatamente que P, P´ y P´´ no pueden estar los tres en un mismo plano con el origen de ΞHZ. Como el sistema de coordenadas ΞHZ adoptado inicialmente —y también, por lo tanto, su origen— era completamente arbitrario, podemos considerar que esta condición se cumple siempre que P, P´ y P´´ no estén los tres sobre una misma recta. También se puede decir pues: P, P´ y P´´ no deben estar en una línea recta. Este resultado es asimismo intuitivamente evidente. Si los puntos están en una línea, el sistema $X_1 X_2 X_3$ puede rotarse de cualquier manera en torno a ella y por lo tanto, no es un sistema determinado. Como por lo demás Δ es una función de t hay que distinguir entre la posibilidad de que Δ sea igual a 0 momentáneamente y la posibilidad de que Δ sea idénticamente 0. En el primer caso, la indeterminación es sólo momentánea y no significa gran cosa; pero en este último caso es permanente.

Examinemos más de cerca el sistema de ecuaciones resolvente derivado de (4), con las incógnitas δ_1, δ_2, δ_3, φ, φ' y φ''. Como podría demostrarse fácilmente, este es cuadrático y posee, en consecuencia, varias soluciones reales o imaginarias. A aquéllas corresponden sistemas de coordenadas reales $X_1 X_2 X_3$; a éstas, en cambio, en los casos en que surgen, corresponden sistemas imaginarios, con referencia a los cuales, sin embargo, los puntos describen trayectorias reales, a saber, las prescritas. Prescindo naturalmente de que también podrían prescribirse trayectorias imaginarias. Por lo demás, en el caso general es perfectamente posible que un sistema de coordenadas correspondiente a la exigencia prescrita pase, por un tiempo, del dominio real al imaginario y viceversa.

Las condiciones para que el sistema resolvente considerado no posea una serie de soluciones no podrían descubrirse por la vía analítica que hemos emprendido sin incurrir en algunas complicaciones. Preferimos retraducir esta cuestión a términos intuitivos. Supongamos que P, P´ y P´´ no están sobre una misma recta. ¿Qué condiciones adicionales hay que cumplir para que en un instante dado t no haya una serie infinita de sistemas de coordenadas $X_1 X_2 X_3$, relativamente a los cuales P, P´ y P´´ se encuentren sobre las tres trayectorias rectilíneas prescritas? Según lo supuesto, la posición del sistema $X_1 X_2 X_3$ con respecto a ΞHZ será una bien determinada, en el tiempo t, en cuanto la posición de los puntos P, P´ y P´´ esté determinada relativamente a $X_1 X_2 X_3$. Pero estos puntos tienen en el instante indicado ciertas distancias mutuas dadas. La condición adicional buscada coincide pues con la condición para que tres puntos P, P´ y P´´, que se encuentran a ciertas distancias dadas sobre tres rectas prescritas G, G´ y G´´, no puedan ser ordenados de

infinitas maneras diferentes. Ya la intuición nos permite conjeturar que dicha condición no es otra que ésta: las rectas prescritas no pueden ser paralelas. Un cómputo que no efectuaremos aquí confirma esta conjetura. Para que haya una serie infinita de ordenamientos de tres puntos rígidamente conectados sobre tres rectas prescritas es necesario y suficiente que éstas sean paralelas. (En el supuesto, eso sí, de que la prescripción se limite a líneas rectas reales.)[17]

Recapitulemos los resultados cinemáticos obtenidos: El movimiento rectilíneo de un conjunto de puntos geométricos móviles es materia de *convención* si su número no pasa de tres. Se puede hacer que tres puntos se muevan sobre tres rectas fijas prescritas si se adapta, por así decir, a las variaciones de las distancias entre los puntos, el sistema de coordenadas al cual esas rectas fijas están referidas. Por regla general hay varios de estos sistemas adaptados, en movimiento recíproco; pero en todo caso no constituyen una serie infinita a menos que los tres puntos estén sobre una misma línea recta y que las tres rectas prescritas sean paralelas.

3. De las consideraciones *puramente cinemáticas* precedentes pasamos al problema que propiamente nos interesa si introducimos el supuesto *dinámico* de que P, P´y P´´son partículas materiales libres. Surge por sí sola la pregunta: ¿Se podrá definir un "sistema inercial" simplemente como un sistema de coordenadas con referencia al cual tres partículas libres no colineales cualesquiera se muevan sobre tres rectas no paralelas?

Sobre la base de simples consideraciones de variedad hay que contestar negativamente a esta pregunta. Los sistemas inerciales constituyen —como ya lo supieron Newton y Euler[18]— una variedad de sistemas que se mueven sin rotación en línea recta y uniformemente (conforme a una escala de tiempo inercial) con respecto a uno de ellos, que podemos elegir a nuestro arbitrio como término de referencia. No es difícil indicar el grado de esta variedad. Limitémosnos a los sistemas ortogonales. Si reunimos en un complejo a todos los sistemas inerciales en reposo recíproco que se distinguen sólo por su origen y la dirección de sus ejes, hay ∞^3 de estos complejos, pues el movimiento rectilíneo uniforme de cada uno de ellos relativamente al sistema inercial elegido como término de

---

[17] Lo dicho puede probarse estudiando las condiciones en que un cierto determinante funcional de tres columnas se anula idénticamente.

[18] Newton, *Principia*, p.18 (Corolario V). Euler, *Mechanica*, Tomo I, § 59, 69, 77, 80, 82 (Cf. su *Theoria Motus*). En ambos autores este conocimiento está por otra parte enturbiado por la superflua hipótesis metafísica de un espacio absoluto real.

referencia puede ser diferente con respecto a la dirección, que es doblemente variable, y a la velocidad, que es simplemente variable. Cada complejo contiene a su vez ∞^6 sistemas, de suerte que en total tenemos que habérnoslas con ∞^9 *sistemas inerciales ortogonales.*[19] Pero la variedad de los sistemas ortogonales en que P, P´ y P´´ se mueven de algún modo en línea recta es ∞^{12} (véase arriba). Por consiguiente, hay también entre éstos algunos sistemas no inerciales y se trata de encontrar las determinaciones adicionales que restrinjan adecuadamente la definición demasiado amplia de sistema inercial que hemos propuesto a título provisional. Me parece que no sería fácil lograrlo en el caso completamente general en que las tres "partículas fundamentales" P, P´y P´´son de cualquier clase. No así en el caso especial en que tomamos como base a tres partículas libres lanzadas simultáneamente desde el mismo punto, como quien dice surgidas de una sola. Entonces la condición restrictiva necesaria y suficiente reza así: las tres trayectorias rectilíneas deben pasar por un mismo punto. Para probarlo, propongo y demuestro el siguiente

Teorema: Un sistema, con referencia al cual tres partículas materiales no colineales, lanzadas simultáneamente desde un mismo punto del espacio y dejadas luego en libertad, describen tres rectas concurrentes en un punto, pero no coincidentes, es un sistema inercial. En otras palabras: con referencia a tal sistema, cualquier otra partícula libre se mueve asimismo en línea recta.

Demostración: Puedo partir del supuesto físicamente confirmado innumerables veces de que un sistema inercial y una escala inercial de tiempo son cinemáticamente posibles. Vale decir que con referencia a un cierto sistema todavía desconocido ΞHZ y con referencia a una cierta escala de tiempo todavía desconocida $0 \ldots . t$, los movimientos de un número cualquiera de partículas libres son rectilíneos y uniformes. Concebimos entonces que todos los movimientos están referidos a este sistema y a esta escala. En aras de la simplicidad trasladamos el origen de aquél al punto de partida común de las partículas fundamentales P, P´ y P´´, y el origen de la escala de tiempo, análogamente, al instante en que estas partículas coinciden. Bajo estos supuestos se puede escribir simplemente

$$\begin{array}{lll} \xi = \kappa t & \eta = \lambda t & \zeta = \mu t \\ \xi' = \kappa' t & \eta' = \lambda' t & \zeta' = \mu' t \\ \xi'' = \kappa'' t & \eta'' = \lambda'' t & \zeta'' = \mu'' t \end{array}$$

donde las κ, λ, μ son cualesquiera magnitudes independientes de t.

---

[19] Si se concibe, como lo he hecho en el escrito citado, a todos los sistemas inerciales en mutuo reposo como uno solo (sin preocuparse por los orígenes y las

¿Cómo se mueve respecto a ΞHZ un sistema de coordenadas $X_1 X_2 X_3$, con referencia al cual P, P´ y P´´ avanzan a lo largo de tres rectas dadas que parten de un mismo punto? Si el punto de intersección de las rectas coincide con el origen de $X_1 X_2 X_3$, las ecuaciones de las trayectorias prescritas toman la forma $(i = 1,2,3)$:

$$x_i = b_i \varphi(t) \qquad x_i' = b_i' \varphi'(t) \qquad x_i'' = b_i'' \varphi''(t)$$

donde los valores b son constantes dadas y las $\varphi(t)$ son funciones incógnitas de t. El sistema (2) de la página 160 se simplifica pues, por la desaparición de los valores a. Sea además

$$\Delta = \begin{vmatrix} \kappa & \lambda & \mu \\ \kappa' & \lambda' & \mu' \\ \kappa'' & \varphi'' & \mu'' \end{vmatrix} t^3 \equiv Rt^3$$

donde R es un valor constante y, conforme a lo supuesto, diferente de cero. La primera ecuación del sistema (3) en la página 161 puede escribirse

$$Rta_i = \begin{vmatrix} b_i\varphi - \delta_i & \lambda & \mu \\ b_i'\varphi' - \delta_i & \lambda' & \mu' \\ b_i''\varphi'' - \delta_i & \lambda'' & \mu'' \end{vmatrix}$$

o bien

$$Rta_i = A_i\varphi + A_i'\varphi' + A_i''\varphi'' + B_i\delta_i$$

y por último, dividiendo ambos miembros por t:

$$Ra_i = A_i\frac{\varphi}{t} + A_i'\frac{\varphi'}{t} + A_i''\frac{\varphi''}{t} + B_i\frac{\delta_i}{t}$$

y aquí los valores A y B son independientes de t. Se deducen ecuaciones similares para $R\beta_i$ y $R\gamma_i$. Del sistema de las condiciones de ortogonalidad se obtiene entonces un sistema resolvente de seis ecuaciones cuadráticas con las incógnitas

$$\frac{\varphi}{t}, \frac{\varphi'}{t}, \frac{\varphi''}{t}; \qquad \frac{\delta_1}{t}, \frac{\delta_2}{t}, \frac{\delta_3}{t}$$

cuyos coeficientes son todos independientes de t. Según lo que se ha dicho, las soluciones de este sistema no constituyen una serie infinita.

---

direcciones de los ejes, que cinemáticamente dan lo mismo), la variedad de los sistemas inerciales tridimensionales resulta ser ∞^3. Análogamente la variedad de las escalas inerciales de tiempo, si se prescinde de que el punto cero puede trasladarse, es ∞^1.

Como consisten exclusivamente de valores independientes de t — p, p', p'', q_1, q_2, q_3 — se puede escribir:

$$\varphi = pt, \ \varphi' = p't, \quad \varphi'' = p''t; \qquad \delta_1 = q_1 t, \ \delta_2 = q_2 t, \ \delta_3 = q_3 t$$

Todos los cosenos direccionales asumen entonces valores *constantes*, en virtud de las ecuaciones obtenidas para Ra_i, $R\beta_i$ y $R\gamma_i$.[20]

Por lo tanto, el sistema de coordenadas $X_1 X_2 X_3$, con referencia al cual P, P′ y P″ avanzan a lo largo de las tres rectas prescritas, se mueve relativamente al sistema inercial desconocido ΞHZ en línea recta y sin rotación, y de manera uniforme con respecto a la escala inercial de tiempo desconocida $0 \ldots . t$. No se requiere pues una demostración analítica de que es un sistema inercial.

Entre los innumerables sistemas inerciales que se obtienen de la definición dada variando la combinación prescrita de tres rectas, los hay reales e imaginarios. Pero, como se puede comprobar algebraicamente, no hay entre esos sistemas ninguno que pase, por un tiempo, del dominio real al imaginario, o viceversa.

La *construcción ideal de un sistema inercial* podría acaso efectuarse como sigue. Tres partículas materiales se proyectan simultáneamente desde el mismo punto del espacio, quedando luego libradas a sí mismas. Después que uno se ha persuadido de que no se encuentran sobre una misma recta se las conecta en línea recta con un cuarto punto del espacio elegido arbitrariamente, generando así un ángulo triedro. Si se deja entonces que éste conserve su forma inalterada y se lo adapta a las tres partículas fundamentales de tal modo que cada una de ellas avance ininterrumpidamente sobre una arista del mismo, todo sistema de coordenadas en que el triedro tenga una posición fija es un sistema inercial. Se puede también introducir directamente el triedro mismo como sistema inercial de referencia, pero entonces sus aristas no deben estar en un mismo plano. Conviene observar que esta construcción genera siempre sistemas reales.

III

Me resta sólo referirme brevemente a los intentos hechos por otros autores para reformular la ley de la inercia.

Como es sabido, Carl Neumann busca darle un contenido

[20] La suposición nada inesencial para lo que sigue, de que no se puede saltar de súbito de una solución a otra diferente se cumple si exigimos que los puntos recorran sus trayectorias de modo continuo.

comprensible a la ley mediante la suposición trascendente o —si se prefiere— trascendental de que el sistema de referencia para la parte espacial de la ley está representado de manera desconocida por alguna materia del espacio cósmico, de suerte que en un lugar desconocido del universo hay un cuerpo "Alfa" absolutamente rígido, con referencia al cual las trayectorias de las partículas libres son rectilíneas.[21] La *hipótesis existencial* así propuesta sería muy oportuna si fuese *ineludiblemente necesaria;* entonces se podría y se tendría que aceptarla sin reparos, como a tantas otras hipótesis de la ciencia natural. Pero en el caso presente, como creo haber demostrado, nos basta con una mera *convención* (apropiada), que es capaz de satisfacer nuestra sed de conocimiento mucho mejor que cualquier *hipótesis.*[22] Por lo demás, la definición propuesta de sistema inercial se limita a trasponer del tiempo unidimensional al espacio tridimensional la convención propuesta por Neumann para la medición del tiempo. Al cuerpo trascendente Alfa se le habría podido yuxtaponer fácilmente una sucesión trascendente "Beta"; si se omite esta hipótesis, parece consecuente dejar caer también la otra.

El intento de Mach para reformular la ley de la inercia redunda a fin de cuentas en referir la partícula libre al conjunto de la materia cósmica.[23] Pero como ésta no constituye un complejo que se halle en sí mismo en reposo, sólo puede tratarse, como Mach mismo explica, de un movimiento "medio" de la partícula relativamente a ella. Falta empero toda prueba de que este movimiento sería rectilíneo y uniforme con la suficiente precisión relativa como para poder referirse a él eventualmente en una investigación de la dinámica estelar; para la consideración dinámica de los planetas nos basta, por otra parte, con el complejo de las estrellas fijas, tratado como invariable. Por lo demás, una referencia a la materia universal, dispersa y eternamente agitada, carece de la simplicidad y la unidad que serían deseables.

Streintz define como "sistema fundamental" un sistema de coordenadas que se concibe rígidamente ligado a un "cuerpo fundamental". Su definición del cuerpo fundamental parte de la idea básica siguiente. El giroscopio y otros aparatos similares nos brindan el medio de reconocer si un cuerpo está "exento de rotación". Así, por ejemplo, los ejes de rotación de dos giroscopios que rotan de cualquier modo forman invariablemente el mismo ángulo; nos brindan así dos direcciones "invariables" a las que basta referirse para

---

[21] Loc.cit., p.15 f.

[22] Mach, loc.cit., p.48. Compárese Streintz, loc.cit., p.9.

[23] Mach, loc.cit. y *Die Mechanik,* Leipzig 1883, pp.217s.

comprobar si un cuerpo dado se mueve rotatoriamente. La rotación del cuerpo conocida así ha de ser absoluta, ya que es independiente de la elección de dos giroscopios determinados; vale decir, se presenta como idéntica, cualquiera que sea el par de giroscopios empleado. Streintz llama cuerpo fundamental a un cuerpo que se conozca, mediante observación giroscópica, como exento de rotación, y que pueda considerarse como totalmente independiente de todos los cuerpos circundantes. A un sistema de coordenadas concebido como enlazado con ese cuerpo lo llama, pues, sistema fundamental.[24]

Al referir a un sistema fundamental la ley de la dirección invariable del movimiento de las partículas libres, Streintz intenta hacer superfluo el espacio absoluto. Hay que admitir que, para los efectos de la física *práctica*, lo ha logrado. Pero no sólo carecen sus definiciones de la elegancia deseable, sino que además, en cuanto deben servir de base a la dinámica *teórica*, reposan sobre un *círculo metodológico.* El teorema sobre la inclinación recíproca invariable de todos los ejes de rotación de los giroscopios tuvo que anteponerse a la definición del sistema fundamental y por ende, también a la formulación de la ley de la inercia. En un tratado de física teórica no podría uno menos que deducir de nuevo (implícitamente) ese teorema de la ley de la inercia. Pero esto constituiría un círculo, enteramente comparable al círculo hace tiempo eliminado de la geometría, que está envuelto en la invitación a definir la línea recta como el camino más corto entre dos puntos para luego demostrar que la recta tiene que ser el camino más corto entre dos puntos. No necesito demostrar que la definición de sistema inercial que he propuesto arriba no incurre en ningún reproche de este género. Es verdad que Streintz ha tratado de muchas maneras de parar de antemano las objeciones que acabamos de hacer a su intento. Pero sus razones refutan la imputación, por lo demás injustificada, de un círculo lógico, pero no la imputación de un círculo metodológico.[25] Aunque estimo por esto que la versión de la ley de la inercia propuesta por Streintz es inapropiada para servir de fundamento a la *dinámica teórica*, estoy lejos por cierto de disputarle su significación *secundaria* cuando se trata de *llevar a cabo el tránsito tan importante de la teoría a la aplicación.*[26]

En cuanto al término "sistema fundamental", su elección no me parece feliz. Un nombre para el sistema de referencia que hay que

---

24 Streintz, loc.cit., pp.15-25.

25 Streintz, loc.cit., p.31. Cf. *Phil. St.*, vol. III, p.285.

26 En un círculo metodológico análogo descansa también, sea dicho de paso, la definición dinámica del tiempo, que Streintz favorece (loc.cit.). Cf. *Phil. St.*, Vol. II, pp.292 ss.

representarse siempre en todas las consideraciones dinámicas será por cierto *imprescindible* en lo sucesivo; pero cumplirá su propósito tanto mejor cuanto más determinadamente haga presente la propiedad primordial de este sistema, a saber, la de ser el sistema de referencia de la ley de la inercia. Aparte de otras ventajas, la palabra "inercial" se recomienda mucho también por su aptitud para combinarse con otras. Me basta recordar sólo las expresiones "rotación inercial", "aceleración inercial", cuyo contenido es inmediatamente comprensible para el matemático.

Streintz basa en una observación aforística de Sir W[illiam] Thomson y Tait[27] una segunda definición del sistema fundamental que tiene aquí tanto más interés para nosotros cuanto que posee un cierto parecido externo con la definición de sistema inercial que hemos propuesto. Dicha definición, que por lo demás es puesta, como "menos natural", por debajo de la primera, dice así: "Si varias partículas materiales son lanzadas desde el mismo lugar A en distintas direcciones a velocidades arbitrarias y si de ahí en adelante cada partícula queda librada a sí misma, la experiencia enseña que los ángulos comprendidos entre las direcciones determinadas por dos cualesquiera de las partículas [...] son de magnitud invariable. Un sistema de coordenadas que preserve una orientación invariable respecto a estas direcciones y tenga su origen en cualquiera de las partículas se llamará sistema fundamental". Tengo que confesar que esta definición, como definición fundamental de la dinámica, me parece en todo caso más natural que la otra. ¿Por qué? Porque se apoya en el *elemento* de la teoría dinámica, en la partícula libre, al modo como la geometría, quiero decir, la geometría pura, genera sus configuraciones a partir de puntos geométricos. Aparte de esto, tampoco esta segunda definición del sistema fundamental podrá eludir la imputación de un círculo metodológico. Pues, como se ve, también en ella se antepone al enunciado de la ley de la inercia el enunciado de una "experiencia" que a su vez puede deducirse de la ley y que hasta se presenta de suyo como una consecuencia de ésta; a saber, la experiencia de que los ángulos comprendidos por la línea de enlace entre las partículas son constantes. Conviene observar además que *tres* partículas son enteramente suficientes y que cada partícula adicional resultaría perniciosa. Por último, una ventaja nada desdeñable de la versión de la ley de inercia propuesta arriba consiste en que de la manera más inmediata brinda el conocimiento no sólo de la *convención parcial* envuelta en la ley, sino también de la ambigüedad

---

[27] *Treatise*, Vol. I, part I., § 249. Streintz, loc.cit., p.63, nota marginal.

infinita de los sistemas inerciales.

Me referiré, para terminar, a un cuarto intento, hecho público aproximadamente al mismo tiempo que el mío anterior, y que como tercer o cuarto ensayo dentro del mismo año constituye una prueba más de que la cuestión examinada se ha vuelto candente en la actualidad.[28] James Thomson renuncia en general a una definición del sistema inercial o, mejor dicho, no estima necesario *anteponer* a la ley una definición del sistema espacial que se ha de tomar como base. Expresa la ley de la inercia más o menos así: Para un grupo de partículas libres es *cinemáticamente posible* hallar un sistema de coordenadas —y no sólo uno, sino infinitos— en que todas ellas avanzan en línea recta; y es *cinemáticamente posible* hallar una escala de tiempo con referencia a la cual todas se mueven uniformemente en sus trayectorias rectilíneas.

Pero quien no supiera que es sumamente notable el que *más de tres* puntos se muevan en línea recta relativamente a un mismo sistema de coordenadas, no sería capaz de apreciar plenamente la "gran verdad natural" enunciada primero. Ya que uno no puede menos que manifestar ese conocimiento, parece ser con mucho lo más apropiado expresarlo brevemente, como se hizo arriba, en la formulación de la ley misma. Por lo demás, Thomson concuerda muy bien en numerosos puntos con las opiniones que he expresado anteriormente, como he podido comprobar con alegría.

[28] *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. XII, No. 116, pp.568-578, "On the Law of Inertia".

"On the Law of Inertia".