Diálogos 72 (1998), pp. 21–42.

LA TEORÍA DEL CAOS Y EL PROBLEMA DEL DETERMINISMO

OLIMPIA LOMBARDI

Una corriente de pensamiento actual, originada principalmente pero no exclusivamente en la física, postula una nueva visión indeterminista del universo que modifica la tradicional cosmovisión determinista e incluso afecta los objetivos más específicos de la ciencia; en palabras de René Thom: "Una escuela de epistemología contemporánea pretende que el mundo de las antiguas verdades de la ciencia clásica ha muerto, que el determinismo «laplaceano» ha vivido ya demasiado, y que se abre la era de una nueva ciencia en la cual podrá florecer la innovación, en la cual el libre albedrío del hombre podrá expansionarse a su gusto lejos de las restricciones obsoletas del determinismo mecanicista" (Wagensberg, 1992, p. 63). A esta corriente de ideas adhieren quienes ven en la Teoría del Caos "la muerte al fin sobrevenida del diablillo de Laplace" (Prigogine & Stengers, 1990, p. 108), y ello no por consideraciones basadas en la Mecánica Cuántica, sino incluso dentro del ámbito de la Mecánica Clásica: "para los sistemas caóticos, el determinismo newtoniano sólo puede ser un inalcanzable sueño del teórico" (Ford, 1983, p. 43).

Sin restar importancia a sus fructíferas aplicaciones, puede afirmarse que la Teoría del Caos se ha convertido en una de las nuevas "modas" de la ciencia actual; en los últimos años, expresiones como "caos", "desorden" y "medio aleatorio" han invadido el campo científico a través de libros, revistas y coloquios, e incluso identifican las tareas de ciertos laboratorios de investigación. Pero, como suele suceder con los temas de moda, las nociones asociadas a la Teoría del Caos han desbordado rápidamente su cauce original para ingresar en las más variadas discusiones, donde los contenidos precisos de los conceptos con frecuencia resultan totalmente tergiversados; por ejemplo, pueden leerse osadas tesis acerca del carácter "destructivo" del orden (Etkin, 1993, p. 21), así como vinculaciones entre la noción de caos y el concepto de irracionalidad que anuncian el definitivo "destronamiento de la razón" (Martínez Nogueira, 1993, p. 12). Este avance de los conceptos asociados a la Teoría del Caos ha superado incluso los límites del campo específicamente científico, introduciéndose en áreas ajenas a la ciencia; por ejemplo, ha conducido a interpretar la existencia del caos físico como testimonio de un Creador que interviene de un modo permanente sobre un universo en evolución indefinida e impredictible (*cfr.* Marti, 1991, p. 32).

Pero no sólo en los ámbitos ajenos a la ciencia la Teoría del Caos inspira reflexiones de tono filosófico; también algunos científicos aventuran conclusiones que exceden su campo de estudio. Ejemplo de ello es quienes consideran que la existencia de sistemas caóticos pone de manifiesto que "no hay conexión causal entre el pasado y el futuro" y, por tanto, afecta la validez del propio método científico (*cfr.* Crutchfield *et al.*, 1987, p. 24). El aspecto que desencadena tan variados comentarios pseudo-filosóficos es el supuesto carácter indeterminista de la Teoría del Caos; en este sentido, algunos autores colocan esta teoría en una posición equivalente a la Mecánica Cuántica en lo que se refiere al colapso de la concepción determinista del universo, e incluso creen encontrar en la Teoría del Caos la respuesta al viejo problema del libre albedrío (*cfr.* Crutchfield *et al.*, 1987; Davies, 1990).

El objetivo del presente artículo consiste en brindar un análisis epistemológico de la Teoría del Caos en relación al problema del determinismo. Para ello, en primer lugar se presentarán los fundamentos teóricos generales de la Teoría del Caos y se elucidarán los distintos sentidos que puede adoptar el predicado "determinista" en una discusión epistemológica. Estos elementos permitirán la evaluación crítica de las numerosas conclusiones extra-científicas que suelen inferirse a partir de esta nueva teoría. Por último, se cuestionará la asociación entre caos y aleatoriedad que surge de la definición del concepto de caos en función de la noción de complejidad algorítmica.

* * *

Durante el siglo XIX, entre los físicos prevalecía la idea de que los sistemas mecánicos debían presentar un comportamiento regular y predictible en la medida en que resultaba descripto por ecuaciones diferenciales. Pero esta idea sufrió un duro golpe cuando, sobre finales del siglo, Henri Poincaré demostró que aún ciertos sistemas regidos por las ecuaciones de Hamilton podían evolucionar de un modo irregular y aperiódico[1]. Uno de los grandes méritos de Poincaré fue su modo de abordar problemas clásicos desde perspectivas totalmente originales: sus métodos, basados en un enfoque geométrico y topológico, fueron más cualitativos que cuantitativos y brindaron el marco teórico para las actuales investigaciones sobre sistemas dinámicos inestables. Fue necesario que transcurrieran setenta años para que el meteorólogo E. N. Lorenz, en 1963, pudiera obtener los primeros resultados cuantitativos: gracias a su primitiva computadora, Lorenz calculó la evolución generada por un sencillo sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales, mostrando que tal evolución corresponde a un comportamiento irregular y aperiódico, que luego pasó a denominarse "caótico".

Cabe recordar aquí ciertas características de las ecuaciones diferenciales utilizadas en física para la descripción del comportamiento de sistemas dinámicos. Desde el punto de vista matemático, se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias —esto es, que poseen una única variable independiente— que cumplen las condiciones necesarias para asegurar la existencia y la unicidad de sus soluciones para cada conjunto de valores de las variables dependientes[2]. Desde el punto de vista físico, la variable independiente representa el tiempo, las variables dependientes —variables de estado— representan las magnitudes físicas que definen el estado del sistema, y cada solución describe la evolución temporal del sistema dadas las condiciones iniciales —valores iniciales de las variables de estado. Un recurso ampliamente utilizado en física consiste en representar el comportamiento de un sistema dinámico en el llamado "espacio de las fases" correspondiente, esto es, un espacio euclídeo de tantas dimensiones como variables de estado posea el sistema; en tal espacio, cada punto representa un estado posible del sistema y, dado el punto correspondiente al estado inicial, la evolución temporal del sistema queda representada por una trayectoria que se inicia en dicho punto. Gra-

1 Una interesante presentación de los aportes de Poincaré en este ámbito puede encontrarse en Chabert & Dalmedico (1991).

2 Dada una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, si se cumplen las siguientes condiciones: (i) puede expresarse en su forma normal $dx/dt = F(x,t)$; (ii) $F(x,t)$ y dF/dx son continuas en un cierto dominio D del plano Oxt; y (iii) (x_0, t_0) es un punto de tal dominio, entonces existe una solución única $x(t)$ de tal ecuación diferencial que satisface $x=x_0$ para $t=t_0$. Este teorema de existencia y unicidad puede encontrarse en textos avanzados sobre cálculo diferencial; por ejemplo, *cfr.* Piskunov (1994).

cias a esta representación, es posible expresar en lenguaje geométrico las propiedades de existencia y unicidad antes mencionadas: dado un sistema dinámico, para cada punto representativo de su estado inicial, la trayectoria que en él se inicia existe y es única; además, dado que no hay restricciones para fijar el estado inicial del sistema, las trayectorias no pueden cortarse en ningún punto, es decir, no existe ningún estado a partir del cual el sistema evolucione temporalmente según dos o más trayectorias posibles.

La representación en el espacio de las fases permite, a su vez, caracterizar de un modo más sencillo que el puramente matemático una noción central en el estudio del comportamiento de los sistemas dinámicos: el concepto de estabilidad. Se dice que una trayectoria que parte de un cierto punto es estable si, dada cualquier trayectoria que se inicia a una distancia arbitraria $\delta>0$ del punto original, la distancia entre ambas trayectorias se mantiene acotada por debajo de un valor finito $\varepsilon>0$ para todo instante posterior al instante inicial[3]. Físicamente esto significa que la evolución temporal de un sistema es estable si sufre pequeñas variaciones frente a modificaciones también pequeñas de las condiciones iniciales; por ejemplo, éste es el caso del comportamiento de un péndulo ideal sin fricción ni rozamiento para distintos ángulos de oscilación. Las situaciones de evolución estable eran los casos típicamente estudiados durante el siglo XIX, cuando se creía que todo sistema regido por la clásica Mecánica Hamiltoniana debía cumplir con la propiedad de estabilidad en sus posibles evoluciones; fueron precisamente los trabajos de Poincaré los que demostraron la existencia de sistemas Hamiltonianos que, contra la creencia tradicional, pueden presentar evoluciones temporales inestables. El estudio de la estabilidad en sistemas dinámicos fue uno de los elementos teóricos fundamentales para el posterior desarrollo de la Teoría del Caos.

[3] En física suelen utilizarse distintas nociones de estabilidad. Aquí se ha presentado únicamente el concepto de "estabilidad según Lyapounov" debido a su relevancia para la discusión posterior. En términos puramente matemáticos: dada la ecuación $dx/dt = F(x,t)$, cuya solución $x_1(t)$ satisface $x_1(t=t_0)=x_{01}$ y cuya solución $x_2(t)$ satisface $x_2(t=t_0)=x_{02}$, se dice que la solución $x_1(t)$ es Lyapounov–estable cuando, para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que, para todos los valores de $t>t_0$, si se cumple que $| x_{02} - x_{01} | < \delta$, entonces también se cumple que $| x_2(t) - x_1(t) | < \varepsilon$. Aquí también puede consultarse Piskunov (1994).

Pero, en un sistema dado, ¿cómo se manifiesta el comportamiento caótico? Algunas de sus características se asemejan mucho a las del ruido y, por ello, sugieren la presencia de componentes aleatorios:

- La señal generada por el sistema "parece" totalmente aperiódica, errática, carente de toda regularidad, y no se estabiliza con el transcurso del tiempo (no pasa a un régimen periódico).
- La función de autocorrelación de la señal decae rápidamente, asemejándose al caso del ruido blanco.
- El espectro de Fourier de la señal también se parece al del ruido blanco.
- La señal presenta el fenómeno de difusión, normalmente asociado al movimiento browniano (movimiento de una partícula sometida a fuerzas aleatorias en un medio de alta fricción).

Sin embargo, el comportamiento caótico también posee otras características que le son propias:

- A diferencia del ruido —de origen térmico—, la señal caótica no puede "sosegarse" bajando la temperatura.
- También, a diferencia del ruido, genera una trayectoria que se mantiene en una zona limitada del espacio de las fases correspondiente al sistema.
- A pesar de su aparente irregularidad, el comportamiento caótico responde a una regularidad subyacente, en la medida en que puede describirse mediante un sistema de ecuaciones diferenciales cuya propiedad indispensable es la no linealidad.
- Esta no linealidad hace inaplicable el principio de superposición: la señal caótica no puede interpretarse como la superposición indicada por una serie de Fourier. Por lo tanto, el espectro de Fourier de la señal no la representa adecuadamente.
- El fenómeno de difusión no depende de la presencia de fuerzas aleatorias, sino de la propia dependencia temporal de la señal.

Estas características ponen de manifiesto que el comportamiento caótico no se debe a la presencia de fuentes de ruido, ni a la incertidumbre asociada a la Mecánica Cuántica, ni a un elevado número de grados de libertad (el sistema de Lorenz tiene sólo tres grados de libertad); la irregularidad del comportamiento caótico es exclusivamente resultado de la propia dinámica interna del sistema.

En la actualidad se ha desarrollado un amplio campo de estudio dedicado a investigar las propiedades de sistemas de ecuaciones no lineales, tanto diferenciales como en diferencias finitas (por ejemplo, mapas de una o dos dimensiones), que darían lugar a un comportamiento caótico. En algunos casos, la formulación del sistema de ecuaciones responde al interés de describir el comportamiento de algún sistema real particular; en otros casos, se trata de ecuaciones que no refieren directamente a sistemas reales, pero cuyo estudio resulta útil para comprender la dinámica propia del comportamiento caótico. Al mismo tiempo, se han ido encontrando diversos sistemas reales —biológicos, físicos, químicos, económicos, etc.— que, convenientemente modelados, responden adecuadamente al tipo de ecuaciones que caracterizan el comportamiento caótico; por lo tanto, el comportamiento aparentemente errático de tales sistemas puede ahora ser explicado como manifestación de una regularidad subyacente. Lamentablemente, el rápido crecimiento en este campo de estudio no ha venido acompañado por un proporcional desarrollo de análisis epistemológico en relación a esta nueva teoría. Por ello, resulta conveniente detenerse en algunos aspectos epistemológicos y definicionales referidos a la Teoría del Caos.

En primer lugar, ¿qué tipo de teoría es la Teoría del Caos? Considerada con independencia de su génesis histórica y de las motivaciones para su desarrollo, la Teoría del Caos no es una teoría fáctica en sentido estricto: el comportamiento caótico puede producirse en cualquier tipo de sistema real, sea físico, biológico, económico, etc.; incluso dentro del ámbito de la física, el caos puede manifestarse en sistemas descriptos por la Mecánica Clásica, la Mecánica Cuántica o cualquier otra teoría referida a la dinámica de entidades físicas[4]. El comportamiento caótico es resultado de las propiedades de las ecuaciones que describen la dependencia temporal de un sistema y, por tanto, no se encuentra ligado a teoría fáctica particular alguna. En consecuencia, podría abordarse la Teoría del Caos desde una perspectiva puramente sintáctica, con independencia de la interpretación semántica de las variables involucradas en el sistema de ecuaciones bajo estudio; ello indica que, en rigor, la Teoría del Caos es una teoría matemática acerca de las propiedades de las soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales (o en diferencias finitas) no lineales. No resulta sorprendente, entonces, la amplia aplicabilidad de la

[4] Curiosamente, parece haberse establecido que los sistemas cuánticos resultan ser "menos caóticos" que sus contrapartidas clásicas, de modo tal que la Mecánica Cuántica "atenuaría" los efectos del caos (*cfr.* Schuster, 1989; Casati, 1991).

Teoría del Caos a muy diferentes ámbitos de la realidad, del mismo modo que no nos sorprende la gran diversidad de sistemas abordables mediante el cálculo diferencial lineal de Leibniz y Newton. Sin embargo, en general la teoría se aplica al estudio de ecuaciones dinámicas (al igual que el tradicional cálculo diferencial), donde la variable independiente representa la dimensión temporal; de este modo, el predicado "caótico" pasa a aplicarse a ciertos sistemas cuyo comportamiento temporal se describe mediante cierto tipo de ecuaciones dinámicas y queda representado por una trayectoria (continua o discreta) en el espacio de las fases correspondiente. En este punto cabe señalar que, sólo cuando la Teoría del Caos es interpretada como una teoría acerca del comportamiento de cierto tipo de sistemas dinámicos, entra en escena el problema del determinismo, problema que sólo cobra sentido en relación a la evolución temporal de los sistemas reales o a las ecuaciones que describen tales evoluciones.

En segundo lugar: así interpretada la Teoría del Caos, ¿cómo se define el comportamiento caótico? Si bien la definición precisa del concepto de caos continúa siendo objeto de debate[5], entre los especialistas existe un consenso prácticamente unánime acerca de ciertos puntos:

- Los sistemas que pueden presentar comportamiento caótico quedan descriptos por sistemas de ecuaciones diferenciales[6] de la forma:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}, r)$$

  donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ y r es un parámetro. Tales ecuaciones son:

  – <u>autónomas</u>: F no depende explícitamente de la variable tiempo.

  – <u>no lineales</u>: F es una función no lineal de las $\{x_j\}$.

En otras palabras, no linealidad y autonomía de las ecuaciones diferenciales son condición necesaria pero no suficiente para el comportamiento caótico.

- Todo sistema de comportamiento caótico es sensible a las condiciones iniciales. Esto significa que, en el espacio de las fases correspondiente, las trayectorias divergen exponencialmente. Por ejemplo, supóngase un sistema descripto por una única ecuación diferencial $dx/dt = F(x)$ y

---

[5] Una profunda discusión acerca de cierto tipo de definiciones del concepto de caos puede hallarse en Batterman (1993).

[6] Por cuestiones de simplicidad, a partir de aquí se hablará sólo de ecuaciones diferenciales; pero las mismas consideraciones son aplicables al caso de ecuaciones en diferencias finitas $[\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n, r)$, con $\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{dn})]$

sean dos puntos separados una distancia δ, la distancia entre las trayectorias que se inician en tales puntos debe aumentar exponencialmente con el tiempo según:

$$\delta\, e^{ht}$$

donde h se denomina "exponente de Lyapounov" y mide, precisamente, tal divergencia exponencial ($h>0$)[7]. Por lo tanto, la sensibilidad a las condiciones iniciales que exhiben los sistemas de comportamiento caótico implica su inestabilidad: la evolución temporal del sistema manifiesta grandes variaciones frente a pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

Esta sensibilidad a las condiciones iniciales conduce a una importante consecuencia respecto de la predictibilidad de los estados futuros de los sistemas de comportamiento caótico. En la práctica, la precisión finita de nuestros instrumentos de medición impide conocer con precisión infinita el estado inicial de un sistema. Si se trata de un sistema "no caótico", la situación no es grave: pequeñas incertidumbres en la determinación empírica de las condiciones iniciales se convierten en incertidumbres grandes pero acotadas (aumentan linealmente con el tiempo) en el curso ulterior de la evolución. Pero si el sistema presenta un comportamiento caótico, las pequeñas incertidumbres iniciales se amplifican exponencialmente con el transcurso del tiempo de modo tal que, en la práctica, para tiempos muy superiores a 1/h ($\tau = 1/h$ se denomina "tiempo de Lyapounov") la predicción unívoca de los estados futuros del sistema se torna imposible. En otras palabras, a medida que transcurre el tiempo se produce una pérdida de información acerca del estado preciso en el que se encuentra el sistema; intuitivamente, en $t=0$, la localización del punto representativo con una precisión δ brinda mayor información que su lo-

[7] Este caso puede generalizarse para un sistema con d variables de estado, cuya evolución temporal se representa en un espacio de la fases Γ d-dimensional. En este caso existen d exponentes de Lyapounov h_i, uno por cada dirección $\mathbf{x}_i$ de Γ, cumpliéndose que:

- Los $h_i>0$ indican divergencia exponencial en las direcciones $\mathbf{x}_i$.
- Los $h_j<0$ indican contracción exponencial en las direcciones $\mathbf{x}_j$.

Debe cumplirse, en valores absolutos:

- en los sistemas conservativos (se conserva el volumen en Γ —teorema de Liouville): la suma de los $h_i>0$ debe ser igual a la suma de los $h_j<0$.
- en los sistemas disipativos (disminuye el volumen en Γ): la suma de los $h_i>0$ debe ser menor que la suma de los $h_j<0$.

calización dentro de $\delta\, e^{h\,\Delta t}$ luego del intervalo Δt. La Teoría del Caos suministra una magnitud que permite precisar esta noción intuitiva: la K-entropía o entropía de Kolmogorov mide la velocidad media de pérdida de información acerca del estado preciso del sistema dinámico[8]. En este sentido, la K-entropía puede considerarse como un indicador de "qué tan caótico" es el comportamiento de un sistema y, como era de esperar, resulta proporcional al exponente de Lyapounov[9].

* * *

¿Son suficientes estas peculiaridades del comportamiento caótico para afirmar el carácter indeterminista de los sistemas que lo manifiestan? Para responder a esta pregunta, en primer lugar es necesario elucidar los diversos sentidos con los cuales puede utilizarse el término "determinista":

- En un primer sentido, que denominaremos "semántico", el predicado "determinista" se aplica a ecuaciones dinámicas: se dice que una ecuación dinámica es determinista cuando, dado el valor de las variables dependientes en un cierto instante, fija unívocamente el valor de dichas variables en todo instante posterior. En el espacio de las fases esto implica que las trayectorias no pueden cortarse, esto es, no existe ningún punto del espacio de las fases del cual emerja más de una trayectoria[10].
- En un segundo sentido, que denominaremos "gnoseológico", el predicado "determinista" se aplica al conocimiento acerca de un sistema re-

[8] Sin entrar en detalles técnicos merece comentarse que, en tanto medida de información, la K-entropía se calcula mediante los métodos de Shannon. La estrategia general consiste en dividir el espacio de las fases en celdas y considerar las probabilidades asociadas a las diferentes transiciones entre celdas. Puede demostrarse que el valor de la K-entropía es independiente de la particular partición considerada. Para una demostración formal, *cfr.* Farmer (1982).

[9] En general, la K-entropía es proporcional a la suma de los exponentes de Lyapounov positivos (*cfr.* nota 7).

[10] Podría diferenciarse, a la manera de Earman (1986) entre futurísticamente e históricamente determinista. Aquí nos concentraremos en el primer caso, aplicable tanto a ecuaciones que describen sistemas conservativos como a aquéllas que describen sistemas disipativos. En el caso de sistemas disipativos —ecuaciones futurísticamente pero no históricamente deterministas—, existen zonas del espacio de las fases —los atractores— hacia cuyos puntos convergen infinitas trayectorias —todas las que se originan en la "cuenca de atracción" correspondiente a cada atractor.

al: se dice que poseemos un conocimiento determinista acerca de un sistema cuando el conocimiento del estado de dicho sistema en un dado instante permite conocer unívocamente su estado en todo instante posterior. Sin embargo, así expresado, el sentido gnoseológico del predicado "determinista" resulta demasiado exigente: la práctica científica señala que la determinación empírica del estado de un sistema en un cierto instante brinda, para cada variable de estado, no sólo un dado valor sino un inevitable "error" que depende de la precisión del instrumento de medición utilizado; además, la Teoría de Propagación de Errores permite calcular la evolución de las imprecisiones iniciales con el transcurso del tiempo. En consecuencia, a fin de evitar su vacuidad parece conveniente debilitar el sentido gnoseológico según la siguiente versión: se dice que poseemos un conocimiento determinista acerca de un sistema cuando el conocimiento de su estado en un dado instante permite conocer unívocamente su estado en todo instante posterior dentro de un margen de error acotado.

- En un tercer sentido, que denominaremos "ontológico", el predicado determinista se aplica a los sistemas reales, sean físicos, biológicos, sociales, etc. Se dice que un sistema es determinista cuando, dado su estado en un cierto instante, su evolución para todo instante posterior resulta físicamente (no lógicamente) necesaria; en otras palabras, si el sistema se encuentra en el estado e_1 en el instante t_1, las leyes físicas (interpretadas como regularidades ontológicas) hacen imposible que se encuentre en un estado diferente de e_2 en t_2. Sin duda, en este sentido el predicado "determinista" se convierte en un término metafísico: aún cuando se habla de necesidad física, el significado de los conceptos de necesidad y posibilidad depende del marco metafísico adoptado para su elucidación[11].

Sobre esta base, puede ahora distinguirse:

- *determinismo gnoseológico*: posición gnoseológica que considera que es posible alcanzar un conocimiento determinista de todos los siste-

[11] La elucidación más interesante del predicado "determinista" en un sentido ontológico es la que brinda Earman (1986) sobre la base de la noción de mundos posibles. El fuerte elemento metafísico de esta perspectiva no constituye un "defecto"; por el contrario, resulta perfectamente adecuado en una discusión acerca de cuestiones ontológicas. Sin duda, este tema merece un detenido análisis que excede los límites del presente trabajo; pero las caracterizaciones aquí presentadas permiten diferenciar los sentidos ontológico y gnoseológico de un modo que resulta suficiente para su aplicación al análisis de la Teoría del Caos.

mas reales (sea en la versión fuerte o débil del predicado "determinista" en su sentido gnoseológico).

- *determinismo metafísico*: doctrina metafísica según la cual todos los sistemas reales son ontológicamente deterministas. Desde una perspectiva totalizadora, el universo entero es concebido como un sistema determinista. Quienes adoptan esta posición tienden a interpretar aquellas leyes científicas que se expresan bajo la forma de ecuaciones deterministas, como regularidades que, inscriptas en el plano ontológico, rigen el comportamiento de los sistemas reales[12].

Estas distinciones conceptuales permiten un análisis más preciso del problema del determinismo en su relación con la Teoría del Caos. En primer lugar, puede señalarse que la sensibilidad a las condiciones iniciales que presentan los sistemas de comportamiento caótico pone en aprietos a quien adhiera a un determinismo gnoseológico, aún en su versión debilitada: la amplificación exponencial de las imprecisiones empíricas iniciales impide la predicción unívoca del estado del sistema dentro de márgenes acotados de error para tiempos muy superiores al tiempo de Lyapounov. Éste es el caso típico de los sistemas meteorológicos, cuyo comportamiento caótico torna prácticamente imposible la predicción del estado climático en una cierta zona con una anticipación superior, aproximadamente, a los seis días.

Pero, ¿afectan estas consideraciones a quien adhiera al determinismo metafísico? Las limitaciones predictivas que surgen de la Teoría del Caos no se deben al carácter estadístico de las ecuaciones; por el contrario, las ecuaciones que describen el comportamiento caótico de un sistema son totalmente deterministas: dadas las condiciones iniciales, fijan el valor de las variables de estado para todo tiempo futuro, y se representan en el espacio de las fases mediante trayectorias que nunca se cortan[13]. Por esta

---

[12] A estos casos podría agregarse el determinismo metodológico, perspectiva según la cual la tarea de la ciencia consiste en alcanzar descripciones deterministas (esto es, mediante ecuaciones deterministas) de los sistemas reales, en la medida en que suministran un mejor conocimiento que el que brindan las ecuaciones que sólo permiten calcular la probabilidad de ocurrencia de los estados futuros de un sistema.

[13] Precisamente, sobre la base de la continuidad de las trayectorias en el espacio de las fases y de la condición de determinismo (que las trayectorias no puedan cortarse en ningún punto), el teorema de Poincaré-Bendixson demuestra la imposibilidad de comportamiento caótico en un espacio de las fases de dos dimensiones: dado que las trayectorias caóticas divergentes no pueden quedar confinadas a una superficie, la dimensión de un atractor caótico debe ser mayor que dos. Pero, por otra parte, en un sistema disipativo de tres variables (como el de Lorenz), el atractor debe poseer una

razón, para referirse a este tipo de comportamiento muchos autores utilizan el término "caos determinista", a fin de diferenciarlo de los fenómenos cuya irregularidad se supone producto de elementos aleatorios. En consecuencia, la Teoría del Caos no implica en modo alguno indeterminismo metafísico, siquiera en el caso de una interpretación realista de las ecuaciones "caóticas" como descripción de regularidades inscriptas en el plano real. Por el contrario, quien adhiera a un determinismo metafísico podrá defender su posición sobre la base del carácter determinista de las ecuaciones, las cuales describirían adecuadamente el comportamiento de sistemas ontológicamente deterministas pero no totalmente predictibles. Desde esta perspectiva, el determinista metafísico interpretará el valor positivo de la K-entropía (como así otras magnitudes estadísticas involucradas en la predicción en sistemas de comportamiento caótico) como una medida de la ignorancia del observador acerca del estado preciso en el que se encuentra el sistema. Esta perspectiva, que permite complementar determinismo metafísico e indeterminismo gnoseológico, surge de un modo tan directo de los supuestos básicos de la Teoría del Caos, que suele ser expresada incluso por aquellos autores que pretenden extraer de la teoría fuertes argumentos en favor del colapso de la cosmovisión determinista. Por ejemplo, Paul Davies, en un artículo sugestivamente titulado "*Chaos frees the Universe*", al tiempo que argumenta en favor del carácter "abierto" del universo y de la "realidad" del libre albedrío, sostiene que: "en cierto sentido, el azar o la aleatoriedad pueden ser adjudicados a la ignorancia respecto de los detalles [...] el caos determinista se manifiesta como aleatorio debido a que necesariamente ignoramos los detalles ultra-finos de incluso unos pocos grados de libertad" (Davies, 1990, p. 51). Una análogamente incorrecta transposición de planos es la que permite a Ilya Prigogine extraer conclusiones ontológicas a partir de consideraciones gnoseológicas cuando afirma, por ejemplo, que "la propiedad de caoticidad nos permite establecer una genuina irreversibilidad" (Nicolis & Prigogine, 1989, p. 203), pero, al mismo tiempo, funda tal irreversibilidad "intrínseca" en el hecho de que "nosotros ya no podemos describir una trayectoria que vuelve a su punto inicial" (Prigogine & Stengers, 1991, p. 109) debido a la inevitable "imprecisión en la preparación" de los sistemas (Prigogine & Stengers, 1990, p. 336).

dimensión inferior a la del espacio de las fases (pues su volumen es nulo). La conjunción de ambas restricciones permite comprender una importante característica geométrica de los atractores caóticos: su dimensión fractal.

Dado que la cuestión ontológica se relaciona con el carácter determinista de las ecuaciones, es conveniente detenerse aún en este punto. Como ya fue señalado, no linealidad y autonomía de las ecuaciones diferenciales son condición necesaria para que éstas describan un comportamiento caótico. Pero es precisamente el carácter autónomo de $dx/dt = F(x, r)$ lo que impide que las soluciones $x(t)$ fijen más de un valor de x para cada instante[14]. Estas consideraciones contribuyen a clarificar el sentido de las llamadas "bifurcaciones" propias de cierto tipo de comportamiento caótico: los típicos diagramas de bifurcación que aparecen en los textos de Teoría de Caos no representan la dependencia de la señal caótica respecto del tiempo, sino el valor de la variable de estado correspondiente a los atractores, en función del valor del parámetro r.[15] En otras palabras, se denomina "bifurcación" al valor del parámetro r para el cual cambia el número de los atractores del sistema, y "punto crítico" al valor r_c del parámetro r para el cual el comportamiento del sistema se torna caótico. Lamentablemente, algunos autores describen este tipo de fenómeno como si se tratara de una bifurcación temporal: "en el *momento crucial* de la transición, cuando $r=r_c$, el sistema debe efectivamente efectuar una elección crítica" (Nicolis & Prigogine, 1989, p. 72) [subrayado nuestro]. Tales "momentos críticos" introducirían en el sistema una suerte de "memoria" del pasado que afectaría su ulterior evolución: "el hecho de que sólo una entre varias posibilidades se realiza brinda al sistema una dimensión histórica, un tipo de «memoria» acerca de un evento pasado que ha tenido lugar en un *momento crítico* y que afectará su evolución posterior" (Nicolis & Prigogine, 1989, p. 14) [subrayado nuestro]. Expresiones de este tipo pretenden justificar el indeterminismo metafísico supuestamente implicado por la Teoría del Caos, en la medida en que sugieren la idea de una historia que, a partir de cierto instante, se bifurca en diversas evoluciones posibles de las cuales sólo una se realizará en el futuro; pero tal conclusión sólo puede inferir-

---

[14] Un buen argumento en favor del indeterminismo metafísico podría suministrarlo un sistema donde una de sus variables de estado describiera una evolución temporal $x(t)$ dada por:

$$x(t) = \pm\sqrt{(t - t_c)} \qquad \text{para } t \geq t_c$$
$$x(t) = 0 \qquad \text{para } t < t_c$$

Pero es precisamente este tipo de funciones el que no puede ser solución de ecuaciones diferenciales autónomas, donde la $F(x)=dx/dt$ no depende explícitamente de la variable tiempo.

[15] El más conocido es el diagrama $X(r)$ de bifurcaciones tipo *pitchfork*, que surge del llamado "mapa logístico".

se a través de una sutil tergiversación de conceptos que el lector no especializado suele no encontrarse en condiciones de descubrir.

Las características propias del comportamiento caótico permiten, a su vez, señalar la diferencia entre Teoría del Caos y Mecánica Cuántica respecto del problema del determinismo. En la Teoría del Caos, la descripción estadística de la evolución del sistema surge a partir de la partición de "grano grueso" ("coarse grain") del espacio de las fases, que representa la precisión finita con la que puede ubicarse el punto representativo del sistema. Por el contrario, en la interpretación ortodoxa de la Mecánica Cuántica, la propia función de onda —en tanto descripción dinámica del sistema— expresa una probabilidad a través del cuadrado de su amplitud, sin el recurso a una descripción de "grano grueso" y sin consideración alguna a la propagación de errores. Esta diferencia permite objetar aquellas afirmaciones que colocan la Teoría del Caos y la Mecánica Cuántica en un mismo nivel en cuanto al rechazo del determinismo que implicarían: mientras la Teoría del Caos puede ser cómodamente interpretada desde una perspectiva que combina determinismo metafísico e indeterminismo gnoseológico —a la manera de la Mecánica Estadística de Gibbs—, diversos resultados —tanto teóricos como experimentales— muestran la imposibilidad de interpretar la Mecánica Cuántica desde una perspectiva realista y, a la vez, metafísicamente determinista[16].

Si la diferencia entre determinismo metafísico y determinismo gnoseológico desmiente las afirmaciones pseudo-filosóficas que rodean la Teoría del Caos, el tipo de impredictibilidad propio de los sistemas de comportamiento caótico mitiga las graves consecuencias que la teoría supuestamente implica para el método científico. En primer lugar, aún en los sistemas de comportamiento caótico es posible la predicción estadística, recurso ampliamente adoptado por la ciencia desde el siglo XIX, cuando la probabilidad ingresó en la física a través de la Teoría Cinética de los Gases; y así como entonces no fue cuestionado el método científico en su aspecto predictivo, tampoco lo fue con el advenimiento de la

[16] Resultados teóricos como los de Gleason y Kochen & Specker demuestran que la interpretación estadística basada en el concepto de *ensemble* —a la manera de la Mecánica Estadística— no puede ser sostenida de un modo consistente con la estructura teórica de la Mecánica Cuántica. A su vez, los trabajos de Bell, experimentalmente confirmados por Aspect, eliminan la posibilidad de una interpretación realista y local de la teoría sobre la base de variables ocultas. La discusión pormenorizada de estos temas excede la temática del presente artículo; para una presentación formal y un análisis minucioso de estos resultados, puede consultarse Hughes (1994).

Mecánica Cuántica, cuyo éxito en la predicción estadística jamás fue puesto en duda a pesar de sus numerosas dificultades de interpretación. En segundo lugar, la predicción unívoca de los estados futuros de un sistema de comportamiento caótico no resulta —dentro de márgenes acotados de error— imposible en todos los casos, sino sólo para tiempos de evolución muy superiores al tiempo de Lyapounov. La teoría permite, incluso, calcular el tiempo medio T_m hasta el cual el estado del sistema puede ser predicho:

$$T_m \approx 1/h \log(1/\Delta)$$ [17]

donde h es el exponente de Lyapounov y Δ es la precisión en la determinación de las condiciones iniciales. La rápida amplificación de las imprecisiones iniciales se manifiesta matemáticamente en la influencia logarítmica del valor de Δ sobre el valor de T_m. Pero, para Δ=0, T_m se torna infinito; en otras palabras, una precisión absoluta en la determinación del estado inicial del sistema permitiría predecir los estados futuros para toda la evolución posterior, y esto es precisamente lo que el determinista metafísico, ajeno a problemas predictivos, necesita para defender su posición.

Por último, cabe recordar las numerosas aplicaciones tecnológicas basadas en el aprovechamiento del comportamiento caótico de ciertos sistemas. En lugar de evitar el caos, algunos ingenieros han explotado sus peculiares características para incrementar la potencia de láseres, para sincronizar la salida de circuitos electrónicos, para controlar las oscilaciones en ciertas reacciones químicas e incluso para estabilizar el latido errático del corazón de animales enfermos (*cfr.* Ditto & Pecora, 1993). Una de estas interesantes aplicaciones tecnológicas consiste en la codificación de mensajes para comunicación, sobre la base de la posibilidad de construir dos sistemas que exhiban exactamente el mismo comportamiento caótico en sincronía. Si la señal caótica de uno de ellos se "suma" al mensaje a codificar, sólo quien posea el segundo sistema podrá decodificar la transmisión "restando", de la señal transmitida, la señal caótica que su propio sistema produce, recuperando así el mensaje original (*cfr.* Neff & Carroll, 1993).

* * *

[17] En general, para un sistema con d variables de estado, T_m resulta proporcional a $1/K \log(1/\Delta)$, donde K, a su vez, es proporcional a la suma de los exponentes de Lyapounov positivos (*cfr.* notas 7 y 9).

Otro aspecto que merece especial atención es el referido a la relación entre caos y aleatoriedad: en muchos casos, la bibliografía señala el carácter aleatorio de los sistemas caóticos, introduciendo la noción de azar para su caracterización; por ejemplo, Prigogine sostiene explícitamente que "ciertos sistemas dinámicos inestables son aleatorios, como lo son los juegos de azar tipo Bernouilli [sic]. Así pues [...] se puede hablar de azar; el azar se ha convertido en un elemento fundamental de la dinámica" (Wagensberg, 1992, p. 192). Sin embargo, no todos comparten la misma opinión; algunos autores prefieren resaltar las regularidades que rigen el comportamiento caótico: "si bien los sistemas caóticos parecen comportarse de un modo aleatorio, un examen detenido muestra que poseen un orden subyacente" (Ditto & Pecora, 1993, p. 62). Incluso la propia denominación de la teoría ha sido objeto de críticas, sobre la base de que el término "caos" sugiere la idea de procesos completamente ajenos a cualquier tipo de regularidad; por ejemplo, René Thom prefiere utilizar el término "expansivo" en lugar de "caótico", donde el carácter expansivo alude a la divergencia exponencial de las trayectorias en el espacio de las fases (Wagensberg, 1992, p. 66).

La asociación entre caos y aleatoriedad surge de ciertas definiciones de "comportamiento caótico" basadas en el concepto de complejidad algorítmica, tal como fue presentado independientemente por Gregory Chaitin, Andrei Kolmogorov y Ray Solomonov. El núcleo conceptual de la propuesta consiste en definir la complejidad algorítmica de una secuencia de símbolos como la longitud del programa computacional más corto que puede generar tal secuencia en una máquina de Turing[18]. Por ejemplo, para generar la secuencia:

S = 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

el programa necesario será "Print 01, 10 veces"; en cambio, la secuencia:

S = 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1

requiere el programa "Print X", donde X es la copia completa de S. De acuerdo con este criterio, la secuencia será aleatoria si posee complejidad algorítmica máxima, esto es, si el programa más corto que puede generarla tiene aproximadamente la misma longitud que la propia se-

[18] Una máquina de Turing es un dispositivo abstracto que, según se demuestra, puede simular el comportamiento de cualquier computadora digital, aún la más compleja. Este concepto fue introducido por el matemático inglés Alan Turing en 1936.

cuencia[19]. De este modo, se formaliza la intuición según la cual la primera secuencia no es aleatoria mientras la segunda sí lo es.

Sobre la base de tales nociones, Joseph Ford sostiene que: "en un sentido técnico estricto, caos es meramente un sinónimo para la aleatoriedad, tal como la teoría de la complejidad algorítmica de Andrei Kolmogorov, Gregory Chaitin y Ray Solomonov así claramente lo revela" (Ford, 1989, p. 350). La estrategia de Ford consiste en dividir el espacio de las fases en celdas numeradas y asociar la trayectoria en dicho espacio con la secuencia de los números de las celdas que sucesivamente va ocupando el punto representativo del estado del sistema. Un teorema de A.A. Brudno (1978) le permite, a su vez, asociar la complejidad algorítmica de la secuencia con la noción de K-entropía del sistema: según este teorema, si una particular secuencia de salida de un sistema dinámico abstracto es algorítmicamente aleatoria, en general el sistema poseerá una K-entropía positiva. Efectuados estos pasos, Ford establece que: "si puede demostrarse que la secuencia de los números de las celdas correspondientes a una órbita es aleatoria, entonces la órbita misma es también aleatoria" (Ford, 1983, p. 43). El así definido carácter aleatorio de la trayectoria en el espacio de las fases constituye, para el autor, la manifestación del comportamiento caótico del sistema.

No obstante su precisión, esta definición del concepto de caos no carece de objeciones. Por ejemplo, Robert Batterman señala la insuficiente relación entre el objeto de la definición algorítmica, esto es, la secuencia numérica, y el sistema que genera tal secuencia: la aleatoriedad algorítmica es una propiedad de una secuencia de símbolos, mientras que lo que se requiere es una definición de "caos" aplicable a sistemas dinámicos (Batterman, 1993, p. 59). La argumentación de Batterman se apoya en su propuesta de una condición de adecuación totalmente razonable para cualquier definición aceptable del concepto de caos: ninguna definición adecuada puede permitir que un sistema clásico integrable resulte caótico[20]. El núcleo del problema reside en que la definición algorítmica

---

[19] Esta definición puede expresarse adecuadamente en términos matemáticos. Para el caso de secuencias infinitas surgen algunas dificultades técnicas que exceden el objetivo del presente artículo.

[20] En un sistema integrable, cuyo comportamiento se representa en un espacio de las fases de 2n dimensiones, las trayectorias se encuentran confinadas sobre un toro de dimensión n. Como consecuencia de ello, tales trayectorias sólo pueden, a lo sumo, divergir linealmente con el tiempo, siendo imposible un comportamiento de tipo caótico.

no cumple esta condición: compárense dos "cajas negras", una que contiene una rueda de kermesse a la cual se imparten diferentes cantidades de movimiento angular en intervalos regulares de tiempo, la otra que contiene un gas ideal bajo el modelo de esferas rígidas; mientras el segundo sistema es efectivamente caótico, el primero constituye un sistema clásico integrable que simula una salida aleatoria. Sin embargo, la definición algorítmica de caos no diferencia entre ambas situaciones; en palabras del autor: "La definición de caos por complejidad algorítmica apunta a la salida de un sistema sin consideración alguna del movimiento o mecanismo que genera tal salida [...]. Considero que una definición razonable de caos debería tomar en cuenta el carácter del movimiento subyacente; por el contrario, en esta definición tal movimiento es completamente ignorado. La definición algorítmica refiere a una consecuencia del caos: la no computabilidad de la secuencia de salida" (Batterman, 1993, p. 63).

Pero aún suponiendo que la secuencia de salida algorítmicamente aleatoria ha sido producida por la dinámica caótica del sistema, ¿tal tipo de aleatoriedad atenta realmente contra el determinismo metafísico? Como ya fue señalado, la K-entropía mide la velocidad media de pérdida de información acerca del estado en el que se encuentra el sistema y, por tanto, surge de una partición finita, de "grano grueso", del espacio de las fases. En consecuencia, la K-entropía —que Ford asocia con la aleatoriedad algorítmica de la secuencia de salida— no señala una aleatoriedad relevante para minar el determinismo metafísico, pues no indica que, a partir de un mismo estado, el sistema manifiesta más de una evolución posible (emergencia de más de una trayectoria a partir de un mismo punto del espacio de las fases). Para precisar aún más lo dicho, resulta particularmente adecuada la terminología que introduce Earman (1986, Cap. IX) cuando distingue entre "micro-" y "macro-" aleatoriedad: los sistemas de comportamiento caótico exhiben una macro-aleatoriedad compatible con su micro-determinismo. Con esta terminología puede afirmarse que la micro-aleatoriedad de un dado sistema, si se probara irreductible, constituiría un grave escollo para el determinismo metafísico; pero la macro-aleatoriedad, en tanto propiedad gnoseológica, no permite aún inferir conclusiones ontológicas acerca del carácter determinista del sistema. En este sentido Jorge Wagensberg alerta acerca de las precauciones que deben adoptarse al asimilar caos y aleatoriedad en todo intento de argumentar en favor del indeterminismo a partir de la Teoría del Caos: "La definición que tal teoría [Chaitin-Kolmogorov-

Solomonov] proporciona del azar no basta para distinguir entre el azar ontológico y el azar de la ignorancia, ni para determinar si un proceso natural es determinista o no lo es" (Wagensberg, 1992, p. 69). Pero las conclusiones van aún más allá: dado que la Teoría del Caos muestra que el carácter micro-determinista de un sistema no sólo es compatible sino puede originar una macro-aleatoriedad, tal teoría constituye un excelente argumento en defensa del determinismo metafísico; por su intermedio, quien adhiera a tal posición filosófica puede señalar que muchos procesos aparentemente aleatorios y carentes de toda regularidad, en realidad responden a regularidades deterministas subyacentes.

* * *

Por último, conviene detenerse en un argumento que, si bien continúa apoyándose en las características "expansivas" del comportamiento caótico, da un paso más en favor del indeterminismo metafísico. Tal argumento se basa, no ya en los errores experimentales en la determinación de las condiciones iniciales, sino en nuestra limitación para representar los números correspondientes a los valores iniciales de las variables de estado: si tales números son irracionales, involucran una cantidad infinita de información para su representación, almacenamiento y utilización en cálculos; por lo tanto, la imprecisión en la determinación de las condiciones iniciales —que luego se amplificará exponencialmente debido al comportamiento caótico del sistema— no se debería únicamente a la precisión finita de nuestros instrumentos de medición, sino también a otro motivo más profundo, en principio ajeno a consideraciones empíricas. Haciéndose eco de este argumento, Ford sostiene que "el continuo numérico es, físicamente, una ficción" (1983, p. 47), y propone eliminar de la recta numérica, no sólo los números irracionales (por su complejidad algorítmica máxima), sino también los racionales periódicos (pues su generación requiere la repetición infinita de un algoritmo finito), el cero (lo infinitamente pequeño) y el infinito (lo infinitamente grande): "El continuo numérico queda así reducido a un conjunto acotado y finito de puntos, el cual, sin pérdida de generalidad, puede ser considerado como un conjunto finito de enteros. Es este conjunto de números la base sobre la cual se deben reformular las teorías físicas" (Ford, 1983, p. 47).

Si bien éste parece ser un argumento de mayor peso que el relativo a los inevitables errores experimentales, aún son necesarias algunas precisiones. En primer lugar, la inevitable pérdida de información al representar números irracionales, si bien constituye un nuevo y fuerte apoyo para el indeterminismo gnoseológico, sigue sin afectar la cuestión ontológica. El determinista metafísico podrá replicar que tal pérdida de información no se debe a alguna curiosa "indeterminación" o "dispersión" real de ciertas magnitudes, sino únicamente a la imposibilidad de representar el valor inicial de las variables de estado mediante una cantidad finita de información: dicho valor existe, es único, y el sistema evolucionará a partir de él de acuerdo con regularidades deterministas, independientemente de que nosotros podamos o no representarlo. En otras palabras, desde una perspectiva metafísicamente determinista sería absurdo considerar que un mismo sistema es determinista o indeterminista según sea racional o irracional respectivamente el valor inicial de sus variables de estado, y que, en este último caso, la evolución misma del sistema depende del número de dígitos que utilicemos para realizar los cálculos.

En segundo lugar, la propuesta de Ford de recortar convenientemente el continuo tampoco conduce a una interpretación indeterminista de la Teoría del Caos sino, por el contrario, parece brindar un buen antídoto contra ella. La eliminación de los números "conflictivos" del rango de valores de las variables de estado permitiría —dejando aquí de lado los errores experimentales— representar todas las posibles condiciones iniciales con precisión absoluta; en este caso, no existiría pérdida inicial alguna de información que pudiera amplificarse exponencialmente a través del proceso caótico, generando la impredictibilidad de los estados futuros del sistema. De este modo, no sólo podría mantenerse una perspectiva metafísicamente determinista, sino incluso podría recuperarse el determinismo gnoseológico[21]. La desconfianza de Ford respecto del concepto de infinito conduce a un problema filosófico realmente interesante y nada sencillo que, por ello, merece ser abordado en profundidad y no como una mera recomendación al pasar acerca de "la base sobre la cual se deben reformular las teorías físicas". La pregunta que surge de inmediato es si una matemática basada en tal recorte del continuo no se en-

[21] Respecto de esta cuestión, cabría preguntar qué sucede si un número irracional α apareciera, no ya como valor inicial de una variable de estado, digamos x, sino como su valor para un tiempo t_1 a partir del cálculo sobre la función (o algoritmo) que fija la evolución temporal de x. En el continuo debidamente recortado, ¿cuál de los infinitos racionales que se aproximan asintóticamente a α debería reemplazarlo? Hacer depender la elección del número de dígitos que nuestra computadora es capaz de procesar conduce al problema nuevamente a un terreno gnoseológico. Ford debería recordar la diferencia entre el conjunto ordenado de los enteros y el de los racionales: mientras el primero es discreto, el segundo posee la propiedad de densidad.

frentaría a una dificultad demasiado grave para ser ignorada: su debilidad para brindar un tratamiento formal adecuado a muchos problemas tradicionales de la física.

* * *

En conclusión, este análisis de los diversos aspectos involucrados por la Teoría del Caos en relación al problema del determinismo pone de manifiesto que la existencia de sistemas caóticos constituye un obstáculo difícilmente salvable para el determinismo gnoseológico. No obstante, la Teoría del Caos, entendida como una teoría acerca de sistemas dinámicos e interpretada desde una perspectiva realista, brinda a la vez un excelente argumento para el determinista metafísico quien, con su ayuda, puede mostrar que muchos procesos aparentemente aleatorios y carentes de toda regularidad, en realidad responden a leyes deterministas subyacentes que restauran la dependencia temporal unívoca entre los estados del sistema, si bien no permiten la predicción unívoca para todo instante futuro.

BIBLIOGRAFÍA

Argyris, J. & Faust, G. & Haase, M. (1994), *An Exploration of Chaos*, North-Holland, Amsterdam.

Batterman, R.W. (1993), "Defining Chaos", *Philosophy of Science*, Vol. 60, Nº 1, pp. 43–66.

Brudno, A.A. (1978), "The Complexity of the Trajectories of a Dynamical System", *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 33, pp. 197–198.

Casati, G. (1991), "De los billares al caos de los átomos", *Mundo Científico*, N° 115, Vol. 11, Julio-Agosto, pp. 756–768.

Chabert, J.L. & Dalmedico, A.D. (1991), "Henri Poincaré, el precursor", *Mundo Científico*, Nº 115, Vol. 11, Julio-Agosto, pp. 716–720.

Crutchfield, J.P. & Farmer, J.D. & Packard, N.H. & Shaw, R.S. (1987), "Caos", *investigación y ciencia*, Nº 125, Febrero, pp. 16–29.

Davies, P. (1990), "Chaos Frees the Universe", *New Scientist*, Vol. 128, Nº 1737, Octubre, pp. 48–51.

Ditto, W.L. & Pecora, L.M. (1993), "Mastering Chaos", *Scientific American*, Vol. 269, Nº 2, Agosto, pp. 62–68.

Earman, J. (1986), *A Primer on Determinism*, Reidel, Dordrecht.

Eckmann, J.P. & Mashaal, M. (1991), "La física del desorden", *Mundo Científico*, Nº 115, Vol. 11, Julio-Agosto, pp. 722–730.

Etkin, J. (1993), "El orden destructivo", *Oikos*, Año 1, Nº 1, Septiembre, pp. 17–21.

Farmer, J.D. (1982), "Dimension, Fractal Measure and Chaotic Dynamics", en H. Haken (ed.), *Evolution of Order and Chaos*, Springer, New York.

Ford, J. (1983), "How Random ís a Coin Toss?", *Physics Today*, Nº 4, Abril, pp. 40–47.

Ford, J. (1989), "What is Chaos, That We Should Be Mindful of It?", en Paul Davies (ed.), *The New Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hughes, R.I.G. (1994), *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press, Cambridge MA.

Marti, J. (1991), "Chaos Might Be the New Order", *Utne Reader*, Nº 48, Noviembre-Diciembre, pp. 30–32.

Martinez Nogueira, R. (1993), "El destronamiento de la razón", *Oikos*, Año 1, Nº1, Septiembre, pp. 12–16.

Neff, J. & Carroll, T. (1993), "Circuits that Get Chaos in Sync", *Scientific American*, Vol. 269, Nº 2, Agosto, pp. 101–103.

Nicolis, G. & Prigogine, I. (1989), *Exploring Complexity*, Freeman, New York.

Piskunov, N. (1994), *Cálculo diferencial e integral*, Limusa, México.

Prigogine, I. & Stengers, I. (1990), *La nueva alianza*, Alianza, Madrid.

Prigogine, I. & Stengers, I. (1991), *Entre el tiempo y la eternidad*, Alianza, Buenos Aires.

Schuster, H.G. (1989), *Deterministic Chaos*, VCH, Weinheim.

Wagensberg, J. (ed.) (1992), *Proceso al azar*, Tusquets, Buenos Aires.