

**BERTRAND RUSSELL 1895-1899:
Una filosofía prelogicista de la geometría**

FRANCISCO A. RODRÍGUEZ-CONSUEGRA.

Este artículo, que forma parte de una amplia investigación sobre Russell, pretende dar cuenta del proceso de formación y desarrollo de su filosofía matemática en el punto donde esta comenzó: la filosofía de la geometría. Se trata de una "fase" sistemáticamente desatendida por los comentaristas (sin duda en parte por sus dificultades intrínsecas e históricas),¹ pero su estudio detallado aporta aquí, entre otras, las siguientes novedades: (1) un análisis de los materiales preparatorios de la obra en sí; (2) un rastreo de sus deudas filosóficas (Bradley, Hegel y, sobre todo, Kant) y técnicas (Stallo, Hannequin); (3) un conjunto de problemáticas anticipaciones de lo que después sería el

¹ La bibliografía existente es escasa y elusiva. La práctica totalidad de las obras generales dedicadas íntegramente a Russell evitan por completo tocar el tema. Los únicos autores que se refieren a él se dividen en dos grupos: los que eluden el aparato técnico y los que eluden el trasfondo filosófico. Del primer grupo Watling 1970 hace sólo breves referencias de pasada, Bowne 1966 casi se limita a introducir el tema en relación con la filosofía kantiana, y Bonfantini 1970, el más completo, se pierde por su obsesión de citar autores contemporáneos. La tesis de Spadoni (1977) maneja los manuscritos inéditos, pero se limita a los aspectos "filosóficos", con lo que no resalta el papel jugado por las construcciones geométricas en la liberación del hegelianismo. En cuanto al segundo grupo, Kilmister 1984 ignora casi por completo los problemas filosóficos, Richards 1988 aporta sólo el contexto histórico de Cambridge, mientras que Torretti 1978 ofrece, en conjunto, la mejor exposición, aunque sin aportar una visión global de la problemática filosófica russelliana, lo que hace difícil el presentar la obra como algo más que un mero escalón en el "progreso" impersonal de la geometría. Todos ellos, independientemente de su valor técnico o filosófico, pasan de largo los aspectos *metodológicos*, que es en nuestro tratamiento lo más importante. Sin duda los juicios posteriores del propio Russell sobre esta obra (1959, 39-40) han influido en semejante situación de abandono, aunque tales juicios, a los que se une su negativa a que la obra fuese reeditada (Blackwell 1972, 4), podrían proceder más bien, de un intento de "olvidar" lo mucho que la obra debía a autores poco conocidos que, como Stallo o Hannequin, apenas se mencionaban. Un último dato curioso que puede contribuir a explicar las dos clases de dificultades a que me refería al principio de esta nota: en una carta de la época destinada a Alys se lee: "In either case I shall be able to utilize both my Triposes [o sea, Matemáticas y Filosofía], and so, I hope, make my dissertation unintelligible to all my examiners, in which case I shall be safe" (cit. por los editores de 1983, p. 246).

método de las construcciones, así como de las dificultades características de los manuscritos de 1898-1900; (4) una interpretación de la polémica posterior (con Couturat y Poincaré) en torno a la naturaleza de los axiomas de la geometría, donde se establece un nexo inesperado con el logicismo enciernes de Pieri (y Peano); y (5) una serie de referencias a la escasa literatura sobre el tema, con objeto de aclarar ciertas dificultades filosóficas.

1. El trasfondo y los primeros escritos

El interés que suscitaba la situación de la geometría (y su filosofía) a finales del siglo XIX estaba en función de las dos novedades características aparecidas hacía poco (y que tanta importancia tuvieron para desarrollar los métodos de introducción de conceptos): las geometrías no euclidianas y la posibilidad de una geometría cualitativa ajena a la distancia y a la medida en general, es decir, la geometría proyectiva.² Ambas suponían un auténtico enfrentamiento con la postura de Kant aunque, paradójicamente, sus descubridores no se preocuparon mucho, en general, de semejante consecuencia. En concreto, sus resultados podían interpretarse como un desafío a uno de los presupuestos kantianos: la identificación, más o menos clara, del espacio como intuición a priori con el espacio euclídeo. Dado que eran lógicamente posibles geometrías no euclidianas, se planteaba el problema de si la geometría euclidiana podía conservar el estatus de fundamento (lógico-epistemológico) necesario de la experiencia.³ En cuanto a la geometría proyectiva, se presentaba como una inmensa generalización desde la cual otras geometrías podían verse como casos particulares, al menos en el sentido de que parecían proceder de aquélla mediante la introducción de ciertos elementos (por ejemplo, la distancia en el sentido métrico).⁴

² Véase Kline en su *Foreword* a FG. Sin embargo, la descripción de Kline de la solución de Russell como una identificación entre la geometría proyectiva y la *forma de exterioridad* (que es a priori), me parece simplista.

³ Por su interés, transcribo aquí directamente el comentario que a este punto me hace llegar Roberto Torretti: "La posibilidad lógica de geometrías distintas de la euclidiana no plantea ningún problema a la filosofía kantiana de la geometría. Kant alude claramente a dicha posibilidad —explorada por su amigo Lambert— en su disertación de 1770 (cf. los pasajes citados en Torretti 1978, p. 31, llamadas 86 y 87; los comento más detalladamente en [Torretti 1974], pp. 31-36)."

⁴ Otra cosa es que, matemáticamente hablando, las otras geometrías puedan verse como verdaderos casos particulares de la proyectiva, lo que no es el caso, por más que Russell pareciese creerlo así en FG. Como me comenta Roberto Torretti, la geometría proyectiva no puede definirse en el espacio topológico subyacente a la geometría euclidiana, por lo que difícilmente puede verse aquélla como una generalización de ésta.

Pero había otros dos desafíos más recientes a la filosofía kantiana. Por un lado, los métodos de introducción de conceptos de Dedekind y Cantor, que reducían los números, la continuidad y el infinito a auténticas construcciones muy alejadas ya de la intuición. Por otro lado, ciertas teorías de la física, como las de Mach, Hertz, Stallo y Pearson, se atrevían a poner en duda conceptos que siempre habían parecido inexpugnables en la ciencia. Así, por ejemplo, la *fuerza* o la *masa* eran presentadas como dudosas construcciones basadas en aún más dudosas justificaciones lingüísticas meramente tradicionales, que podían ser eliminadas o bien reconstruidas con el rigor y la precisión adecuados a una ciencia no metafísica, y ello de una forma igualmente alejada de la intuición.

Russell conocía sobre todo los detalles de las dos primeras novedades mencionadas. En la medida en que fue penetrando en las segundas, nuevos problemas se le fueron planteando, los cuales abordaría una vez terminada su obra sobre geometría. Pero es importante detectar el hecho histórico del gigantesco ataque contra Kant que suponía todo ese conjunto global de nuevas ideas, para entender su impacto sobre la mente del joven Russell, recién salido del cerrado ambiente del Cambridge de finales de siglo.⁵ Dada esa procedencia y su coyuntura personal, los instrumentos de los que disponía Russell para enfrentarse al desafío mencionado eran más bien escasos. Por un lado, disponía del "análisis" al estilo de Bradley, que intentaba reducir las apariencias gramaticales a sus "verdaderas" formas lógicas. Lo cual suponía el predominio de los juicios hipotéticos, según los cuales hemos de limitarnos, en el lenguaje de la lógica, a establecer relaciones de consecuencia y presuposición. A esto se añadía una visión de los conceptos como meras *construcciones* y *artificios* que, aunque en algunos casos podían ser aceptables (siempre que sus "fundamentos" estuviesen justificados), en general no pasaban de constituir recursos a la mera apariencia.

Por otro lado, Russell disponía de una fuerte infraestructura kantiana que, aliada con lo anterior, le permitía luchar contra el empirismo clásico británico (encarnado en Stuart Mill), cuya capacidad para dar cuenta de los juicios de la matemática era, a juicio de Russell, nula. Sin embargo, su conocimiento de Kant no parece muy completo; a veces elude desarrollos centrales, incluso para sus propios objetivos, y otras transforma tesis kantianas según sus necesidades. Si a esto añadimos una cierta utilización, más bien episódica (y terminológica), de Hegel, el panorama no es muy alentador. Sin duda hemos de presuponer el conocimiento de la mayoría de los logros básicos de los

⁵ Richards 1988 ha estudiado el contexto histórico donde se inserta la obra russelliana sobre fundamentación de la geometría, es decir, la tradición matemática de la universidad de Cambridge. Sin embargo, su artículo presenta algunos fallos referentes al propio Russell (véase mi 1990a al respecto).

geómetras de la época, pero Russell estaba enormemente sensibilizado todavía en contra de las "construcciones", gracias a la influencia de Bradley, como para aprovecharse de tales innovaciones de una forma no meramente destructiva (véase sección 3). Sin embargo, su enorme capacidad técnica y filosófica y su gran ingenio le ayudaron a que, *a pesar* de hallarse limitado a semejantes herramientas filosóficas, consiguiera defender dignamente su tesis, sea cual sea el valor que concedamos a FG.

En las secciones siguientes veremos cómo algunos de los rasgos metodológicos russellianos típicos aparecen ya en esta etapa, así como las fuentes de las que Russell se sirvió en su propósito general de corregir y reforzar a Kant. En este sentido, mantendré que su idea global de hacer a Kant compatible con las nuevas geometrías, y, sobre todo, su forma concreta de llevarla a cabo a través del concepto básico de *form of externality*, parecen proceder de Stallo 1882 y, en cierta medida, también de Hannequin 1895 (que, además, lo predispuso contra Cantor).

Ya en 1893 (ensayo póstumo anterior a sus primeras publicaciones) adoptó Russell una postura claramente kantiana en lo tocante al carácter a priori del número y, por ello, abiertamente contraria a Stuart Mill. Lo interesante para nosotros es, sin embargo, ver cómo esa postura se repite en lo tocante a las nuevas geometrías (no euclidianas). Adelantando ya, en parte, la que sería su óptica de FG, afirma Russell que tales geometrías carecen de importancia epistemológica a pesar de haber alcanzado el estatus de sistemas consistentes desde el punto de vista matemático. Sin embargo, se muestra más audaz cuando afirma que la validez de los axiomas de Euclides está en función de la naturaleza misma del espacio, puesto que nuestras intuiciones espaciales son necesariamente euclidianas. Pero, para probar todo ello, ofrece sólo un argumento: el significado de los símbolos usados en las nuevas geometrías es ajeno al espacio; es decir, tienen un contenido meramente analítico, por lo que carecen de interpretación geométrica. Para que pudiesen ser interpretados geoméricamente tendríamos que ser capaces de imaginar espacios no euclidianos; si no podemos hacerlo, no tenemos derecho a considerar nuestros símbolos referidos a relaciones espaciales (1893, 126).

Con ello Russell inaugura su crítica a la intuitividad de la *metageometría* (nombre de la época para las nuevas geometrías), mostrando, al mismo tiempo, que su concepto de *interpretación* dependía de la *visualización*. Su conclusión es que la metageometría no prueba que *pueda intuirse* otro espacio distinto del nuestro: "Es difícil ver cómo las operaciones con símbolos que representan números (como hacen los símbolos algebraicos) pueden probar algo con respecto a las representaciones sensibles, a menos que su aplicabilidad a tales representaciones pueda ser percibida o intuida en algún punto del argumento" (*ibid.*, 129). Esta posición fue matizada en trabajos

posteriores restando valor al argumento de la imaginabilidad y convirtiendo la intuición espacial en algo menos psicológico, pero lo importante ahora es dejar sentado que ya en 1893 contempla Russell las nuevas geometrías como una amenaza para Kant.

También los materiales previos a sus publicaciones sobre geometría (1895b) aportan elementos que fueron poco a poco fijando su postura sobre el tema. Lo más importante de ellos es, sin duda, su insistencia en la distinción entre lo *a priori* y lo subjetivo. Para Russell, la metageometría puede suponer una verdadera objeción contra Kant sólo si se confunde lo *a priori* con lo subjetivo. En cambio, si se distingue cuidadosamente la parte que, en los axiomas geométricos, depende de la intuición espacial de la que se apoya sobre argumentos lógicos, se logrará salvaguardar el *a priori lógico* de semejantes ataques (1895b, 259). Esta sería la base a partir de la cual se elaboraría toda su obra posterior sobre el tema; sin embargo, al estar constituida sobre otra distinción, aún menos clara, entre la intuición y la sensación (*ibid.*, 256), contenía ya dificultades que también se acentuarían en el futuro. Sin duda la influencia de la teoría del juicio de Bradley constituía una gran dificultad para distinguir entre una intuición de carácter lógico-epistemológico de una mera sensación "subjetiva"; en rigor ambas debían dar lugar a juicios dotados de contenido lógico pleno.

En 1895a (su primera publicación) intenta otra distinción similar: la existente entre lógica y epistemología (que era una constante en sus ensayos de subgraduado). Con tal recurso, intenta defender a Kant de otra amenaza implícita: la reducción de la lógica a leyes meramente psíquicas. Aquí la herencia bradleyana era, por supuesto, definitiva. Sin embargo, la amenazante identificación (tan indistinguible, en el fondo, de la postura kantiana) tenía algo positivo y coincidía, al menos, con lo que Russell necesitaba: hacía del *a priori* algo *necesario*, aunque fuese como *forma de nuestra subjetividad*. Russell protesta, no obstante, denunciando "una confusión entre lo psicológicamente subjetivo y el *a priori* lógico" (1895a, 245), que sólo puede superarse constatando el carácter meramente empírico de cualquier *Gedankenexperiment*. Con lo que todo ejemplo de la imposibilidad de imaginar el no cumplimiento de una ley de la lógica sería algo meramente *fáctico*. Al parecer Russell no se daba cuenta de lo cerca que se hallaba, en ese punto, del convencionalismo. (Poincaré hubiese concedido gustoso que los experimentos sobre lo que podemos o no concebir no prueban nada, pero hubiese extraído conclusiones opuestas a las de Russell). En todo caso perseguía

algo completamente distinto: consolidar la separación entre lo a priori y lo subjetivo.⁶

Los antecedentes más importantes de FG son los artículos previos 1896a y 1896c. En ellos se adelantan las tesis principales que serán defendidas en FG con detalle. Sin embargo, su lectura (y comparación mutua) no carece de interés, al mostrar el carácter progresivo de las tres publicaciones: cada una de ellas añade alguna idea importante a la anterior; y ello en *dos* sentidos: (i) conservando la estructura filosófica básica, y (ii) avanzando un paso más desde lo abstracto a lo concreto (explicaré esto más abajo). Se trata de artículos que se dejan sistemáticamente de lado o incluso son falseados, seguramente al presuponerse su contenido de manera superficial,⁷ pero las diferencias son instructivas para constatar la forma en que Russell fue evolucionando. En cuanto al orden, otra prueba de que no se leen es que 1896a suele citarse en las bibliografías como *posterior*, cuando de hecho resulta citado en 1896c (p. 104). Veamos las diferencias fundamentales.

En 1896a se remarca sobre todo el aspecto lógico tal y como Russell lo entendía en esa época. De acuerdo con el "análisis" bradleyano, considera la geometría, no como una ciencia fáctica, sino "simplemente como un cuerpo de razonamiento, las condiciones de cuya posibilidad deseamos examinar" (p. 1). En base a ello, se analiza el espacio (como concepto y no como intuición), hasta encontrar los axiomas que hacen posible el que toda geometría pueda considerarse como "medición espacial", siempre sin entrar en argumentos epistemológicos y sin referirse a lo a priori (salvo de pasada). (Al parecer este artículo exponía parte de la disertación russelliana del año anterior; véase 1983, 266.) En cambio, en 1896c se llega a los mismos resultados partiendo del concepto de *a priori* y sobre bases plenamente kantianas, mientras que en 1896a sólo se mencionaba a Kant en un par de ocasiones (pp. 7 y 8). La diferencia básica es la aparición de lo que sería el concepto central en FG: la *forma de exterioridad* (de la que nada se dice en 1896a),⁸ junto con el

⁶ No obstante, la defensa de la distinción resulta algo extraña, al defenderse también que para separar la lógica de la epistemología es necesario dejar de lado las causas psicológicas de las creencias y pensar en objetos "ideales". Sólo así se lograría que "the laws of thought can be at the same time norms for correct thinking and psychological laws for all thinking" (1895a, 246).

⁷ Por ejemplo, en Torretti (1978, 436) leemos de 1896a: "This article is almost identical with the preceding one [se refiere a 1896c]; their text is reproduced with minor changes in Russell FG". Pero no es cierto que sean casi idénticos: en el texto destaco sus importantes diferencias. El propio Russell en el prefacio de FG califica los cambios como "serious alterations". Además, para Torretti, 1896c parece ser *anterior* a 1896a (véase el texto). Para un estudio exhaustivo de las diferencias *textuales*, véase Russell 1983, apéndices.

⁸ Lo mismo sucede con la noción de *materia*, que es insinuada al final pero que sólo se desarrolla en FG.

célebre "argumento trascendental", que viene a añadirse al "análisis" anterior hasta cumplir el "doble proceso" kantiano (véase sección 4). Está, pues, bastante claro que lo que busca ahora Russell es una fundamentación epistemológica, a pesar de que al comienzo confiese (p. 97) objetivos exclusivamente *lógicos*: aplicar al razonamiento geométrico principios de lógica general (es decir, Bradley sobre todo). Lo que nos sirve para darnos cuenta de que, a pesar de su voluntad de separar lógica y epistemología, lo que intenta sobre todo es huir del psicologismo (siguiendo también a Bradley y, sin saberlo, a Frege). Desde un punto de vista más actual podríamos decir que no distinguía con claridad entre lógica y epistemología, lo cual, por otra parte, era bastante frecuente en la época.⁹

La diferencia más importante entre los dos artículos comentados y FG es que en esta obra se realiza todo el proceso de análisis (de la geometría) y la consiguiente deducción (a partir de la *forma de exterioridad*) de los axiomas de una manera *doble*: en primer lugar sobre la geometría proyectiva y a continuación sobre la geometría métrica.¹⁰ Además, se utiliza la distinción como clave para interpretar la diferencia entre la geometría euclidiana y las no euclidianas, así como para intentar, por primera vez en su obra, una *reducción* de todo un cuerpo de conceptos y axiomas a una estructura simple y cercana a lo que entonces entendía Russell por *lógica* (lo "presupuesto", lo "a priori", etc.). Algo que podríamos calificar de logicismo *en ciernes*, a partir de lo cual la asimilación de tendencias similares en Moore, Whitehead, Cantor y, sobre todo, Peano y su escuela, sería algo totalmente natural.

En lo que sigue, no obstante, me referiré casi exclusivamente a FG, recurriendo a los artículos sólo ante puntos muy concretos sobre los que arrojen alguna luz. Sirva, pues, esta sección al menos para presentar FG como el resultado de toda una evolución anterior. En todo caso su apego a Kant duraría, como mínimo, hasta el contacto con Peano y la aparición de la idea logicista *clara* (previa aceptación de Cantor), e incluso algunos años más, al menos si aceptamos cierta interpretación de algunos de sus textos posteriores.¹¹

⁹ El propio Bradley tenía una visión circular de la lógica de acuerdo con la cual, una vez que uno se internaba en ella, no había forma de establecer un principio, es decir, un orden. Véase Grattan-Guinness 1986, 110-1.

¹⁰ En 1986c todavía se mencionan (p. 100 n.), en cambio, varios argumentos contra la geometría proyectiva. Insistiendo, sobre todo, en que esa supuesta "escuela" no invalida los razonamientos del artículo (que se limitaba, como el anterior, a la geometría métrica). Sería Whitehead quien le convencería de la importancia filosófica de la geometría proyectiva, lo cual reconoce Russell en el prefacio a FG.

¹¹ En todo caso, la moda actual de presentar a Russell como kantiano incluso hasta su contacto con Wittgenstein me parece desencaminada y casi siempre procedente del conocido método de la descontextualización.

2. Ideas centrales de *Foundations of Geometry*

El objetivo de incluir aquí un breve resumen es el de poder referirme en las secciones siguientes a diversos conceptos y argumentos sin necesidad de explicar su lugar en la estructura general de la obra. Como mis objetivos son esencialmente metodológicos, en este trabajo no me he adaptado al orden de la obra sino, más bien, a resaltar los aspectos concretos relevantes. Supla pues esta sección la falta de una exposición sistemática.

FG se divide en cuatro capítulos, una introducción y una conclusión. Diré algo de cada una de tales divisiones (excepto de la conclusión, que sintetiza los resultados). En la *Introducción* plantea Russell el problema a través de dos distinciones. La primera separa el conocimiento a priori de lo subjetivo, intentando reformular el primero de forma puramente lógica y relegando lo segundo a la psicología. La segunda distinción surge al tratar de articular un *test* auténticamente lógico (¿qué apariencia sería imposible negando cierto axioma?); como las proposiciones necesarias son hipotéticas (Bradley), si lo necesario en el conocimiento es lo a priori, entonces se requiere aportar el fundamento que garantice esa necesidad. Lo que puede hacerse de dos maneras: partiendo de la existencia de la geometría como un hecho y, mediante un *análisis*, descubrir los axiomas de los que depende lógicamente, o aceptando su objeto (el espacio o, más bien, la *forma de exterioridad*) como base de hecho y, mediante *deducción*, llegar a los principios (axiomas) que hacen posible esa rama de la experiencia. Como el resultado es el mismo, los axiomas son *doblemente* a priori.

En el *capítulo 1* se ofrece una breve historia de la "metageometría" siguiendo los tres períodos de Klein. En el primero se describe la forma en que se demostró la independencia del axioma de las paralelas. En el segundo se exponen, ya en forma crítica, los resultados relevantes de Gauss, Riemann y Helmholtz y su aplicación al espacio. En el tercero se entra ya en el dominio de la geometría proyectiva a través de la redefinición del concepto de *distancia* (de Cayley y Klein) y la introducción de la noción de Absoluto como base de las diversas geometrías.

En el *capítulo 2* se pasa revista crítica a cinco filósofos de la geometría destacando lo negativo y lo aceptable. Sobre *Kant*, Russell reconoce que la metageometría ha mostrado la imposibilidad de seguir considerando válida la inferencia del carácter a priori y subjetivo partiendo de lo apodíctico de la geometría (ya que otras geometrías son también apodícticas). Sin embargo, la inferencia converso es parcialmente válida pues, aunque haya de prescindir de la distinción entre juicios analíticos y sintéticos (Bradley), permite considerar como a priori todo lo presupuesto en la posibilidad de la experiencia;

y, ciertamente, una *forma de exterioridad* se halla presupuesta en ella, aunque no sea necesariamente el espacio euclidiano. Los dos primeros argumentos "metafísicos" de Kant prueban, al menos, eso, aunque la deducción "trascendental" resulte parcialmente invalidada y reconstruida por Russell. De *Riemann* se rechaza lo que Russell ve como una errónea consideración cuantitativa del espacio, que vicia su definición de "multiplicidad", la cual, aunque matemáticamente valiosa, se opone a la geometría cualitativa. De *Helmholtz* se rechaza la tesis de que la geometría dependa de la física, sobre la base de que su postura suponía un ataque psicologista a Kant. Se admite, sin embargo, que la geometría implica una referencia a una materia "abstracta" e inextensa que, aunque no es la de la física, cumpliría la función de aportar los términos para las relaciones espaciales. Las anteriores críticas se repiten con *Erdmann*, en la medida en que este autor se apoyaba en Riemann y Helmholtz, añadiéndose también algunas críticas particulares sobre sus axiomas geométricos. Por último, Russell descalifica a *Lotze* acusándole de errores técnicos. Sin embargo, aprovecha su planteamiento sobre la posibilidad de la metageometría para fijar el suyo propio: los espacio no euclídeos son posibles en el sentido de que no pueden ser rechazados por ningún argumento a priori, y, al cumplir las condiciones lógicas requeridas para cualquier *forma de exterioridad*, será la experiencia la que decida.

El capítulo 3, el más importante filosóficamente, es un desarrollo del *doble proceso* descrito en la introducción (a FG), aplicado a la geometría proyectiva primero (sec. A) y a la métrica después (sec. B). La *sección A* comienza por analizar las características y recursos básicos con que la geometría proyectiva se convierte en ciencia a priori de todo espacio posible, análisis que deberá desembocar en los axiomas presupuestos en ella. Aunque tal ciencia recurre a coordenadas, ello no implica el uso de magnitudes espaciales; las coordenadas no son más que signos convencionales para denotar ciertos puntos. Las auténticas coordenadas proyectivas se basan en la construcción del cuadrilátero (von Staudt), que permite obtener una auténtica definición descriptiva de la razón anarmónica independientemente de la medida. Sin embargo, todo intento de definir el punto o la recta se revela como circular (dualidad) y conduce a las contradicciones de la relatividad del espacio. De ahí la necesidad de definir el punto proyectivamente, a partir de sus relaciones con otros tres (razón anarmónica proyectiva), que lleva a la conclusión general de que dos figuras relacionadas proyectivamente son cualitativamente similares. El análisis anterior conduce a los *tres axiomas* proyectivos: (i) la relatividad del espacio, (ii) la divisibilidad infinita (el punto como extensión nula y la recta y el plano como "acumulaciones" de puntos), y (iii) la finitud de las dimensiones (de no ser así la geometría sería imposible). Tales axiomas, que reducen el espacio a sus propiedades puramente

cualitativas, convirtiéndolo en sólo un conjunto ordenado de posiciones exteriores las unas a las otras,¹² pertenecen también a toda *forma de exterioridad*, puesto que caracterizan a priori a cualquier espacio posible. Por tanto, sirven como elementos para construir esa forma como concepto independiente de toda intuición concreta (Grassmann) y destinado a proporcionar, formalmente, la diversidad del material de nuestra intuición sensible. La sección termina con la correspondiente *deducción* a priori de los mismos axiomas a partir de esa *forma de exterioridad* y sus propiedades, completándose así el círculo.

La *sección B* lleva a cabo el mismo doble proceso, pero añadiendo la idea de distancia y, por tanto, las de cantidad, medida y movimiento. Por lo mismo, al aparecer un elemento empírico, la geometría métrica se desdobra en euclídea y no euclídea. Sin embargo, puesto que los tres axiomas anteriores son a priori necesarios para cualquier medición, se conservan aquí (con algunas modificaciones de detalle). Los axiomas que den cuenta de los aspectos específicamente euclídeos habrán de ser, en consecuencia, añadidos empíricamente. El doble proceso cursa aquí de la siguiente forma. En cuanto al *análisis*, la relatividad de posición (homogeneidad del espacio) de la sección A pasa a ser aquí *libre movilidad*. Ello garantiza la aplicabilidad de la magnitud a los cuerpos en el espacio, conservando sus figuras y tamaños a través de las superposiciones (la congruencia sería el término a aplicar para esa igualdad espacial). La negación de este axioma daría lugar al absurdo de admitir la posición absoluta y la acción del espacio sobre las cosas (argumento "filosófico"), así como a aceptar la conclusión de que, al variar las figuras con el movimiento, la experiencia no podría servir para determinar, mediante medición, tales variaciones (argumento "geométrico"). A la inversa, puesto que la libre movilidad conlleva la relatividad de posición y ésta no es sino la pura exterioridad formal, podemos *deducir* de ésta la homogeneidad y la libre movilidad (como propiedad necesaria de toda forma de exterioridad). El primer axioma es, tras este círculo, doblemente a priori. A través de consideraciones estrictamente similares, Russell establece también el axioma de *dimensiones* y el axioma de *distancia* (dos puntos determinan una única cantidad espacial: su distancia); ambos también coincidentes con sus respectivos de la geometría proyectiva y, por tanto, también doblemente a priori. Los tres están *presupuestos* en la posibilidad misma de toda medición espacial y son también *consecuencias* de las propiedades necesarias de cualquier forma de exterioridad. Por tanto, el elemento a priori de *toda* geometría consistirá en estos tres axiomas, comunes a los espacios euclídeo y no euclídeo. Los restantes axiomas de la geometría euclidiana (los de las paralelas, las

¹² Véase Couturat 1898a, 362. En general, el resumen que ofrece este autor me ha sido bastante útil.

tres dimensiones y la recta —dos rectas no encierran un espacio—) serán, más bien, empíricos.

En el *capítulo 4* (y último) se extraen las "consecuencias filosóficas" de todo lo anterior a través de dos problemas. (1) En cuanto al carácter necesario (para la experiencia) de alguna forma de exterioridad, que ha sido construida como mera concepción general a priori (como Riemann), Russell afirma que ha de darse también como intuición. Aunque no como intuición subjetiva (Kant), sino más bien como mera exterioridad mutua entre las cosas. La cual, partiendo de la inexistencia de particulares (Bradley), se apoya en la necesidad de todo conocimiento de sustentarse en una "identidad en la diferencia" (Bradley de nuevo) que implique el tiempo y aquella forma de exterioridad mencionada. Sin embargo, ello no supone deducir el mundo perceptivo de meras categorías, sino señalar que, debido a la constitución de la mente, la experiencia sería imposible a menos que el mundo posea ciertas características. (2) Por lo que se refiere a las contradicciones que surgen de la relatividad del espacio (la del punto o de la divisibilidad infinita, la de la interdefinibilidad entre punto, recta y plano y la del orden relacional del espacio), hay que admitir que son inevitables. Pero pueden suavizarse a través de una nueva construcción: la *materia* "abstracta" que sirva de sujeto a la diversidad que el espacio hace posible, aportando los términos necesarios para las relaciones espaciales (los átomos inextensos) y permitiendo la distinción (no contemplada por Kant) entre el espacio vacío y el orden espacial.

3. Crítica de las construcciones geométricas

Cuando Russell se enfrenta en esta obra a algunas de las construcciones típicas de los geómetras del siglo XIX, las somete a duras críticas sobre la base de argumentos diversos que, en general, proceden de la falta de una adecuada teoría de la construcción, de un excesivo respeto por Bradley y de un no muy bien entendido Kant. A partir de lo cual el terreno queda abonado para su distinción entre lo meramente "técnico" y lo filosófico, que mantendría durante tantos años. Por todo ello Russell se muestra incapaz de valorar la trascendencia que poseen tales avances, precisamente para elaborar un nuevo método de introducción de conceptos en la ciencia y en la filosofía.

Tal vez la fuente de toda esa falta de comprensión radique en la escasa importancia que Russell concede al principio de dualidad. Le parece que la posibilidad de definir un punto a partir de dos líneas (y a la inversa), o casos similares, ha de proceder de una indudable falta lógica pues, a su juicio, constituye una contradicción, que es "la forma matemática del círculo envuelto en las definiciones geométricas" (FG, 127). Con ello Russell quiere salvar la posibilidad técnica de usar el principio como recurso demostrativo (pues, admi-

tiéndolo, ciertos teoremas probados, por ejemplo, para líneas, valdrán también para puntos). Es una primera muestra de la repugnancia russelliana ante el hecho de la interdefinibilidad, que volvería a manifestarse con la lógica peaniana.

No obstante, Russell sitúa el problema explícitamente en la relatividad del espacio, a partir de la cual éste no es más que un conjunto de relaciones.¹³ Por tanto, cuando tratamos de buscar los términos de tales relaciones, no logramos salir del mero espacio (único lugar donde podríamos hallarlos) y fracasamos necesariamente: "nuestros términos se desvanecen cuando los agarramos" (FG, 128). La contradicción es considerada insoluble e inevitable a menos que se logre una definición de punto que, sin introducir el espacio como contenido, permita construir la recta a partir de él (o a menos que se introduzca la *materia inextensa*, que aparece en el último capítulo). Sin embargo ello nos forzaría a admitir ideas métricas, sin las que no podríamos lograr que el punto *precediera* a la recta (o a entrar en la física en el caso de la materia). Vemos, pues, que el problema vuelve a ser la interdefinibilidad.

El fenómeno de la interdefinibilidad rebasaba completamente el campo del espacio y constituía un auténtico desafío para la teoría referencialista del significado y para el análisis al estilo bradleyano (sin mencionar su carácter contrario a la intuición). Según la primera, Russell acaba postulando al final de la obra la existencia de la *materia* que convierta los puntos en auténticos *puntos reales* (y lo propio con las líneas). De acuerdo con el segundo, es inadmisibile que al final del proceso de análisis no quede *nada* (no haya "verdadera forma") cuando, obstante, sí se ponen de manifiesto relaciones lógicas entre los elementos. Pero es la tercera dificultad (la intuición) la que le impide avanzar por la línea de Gergonne y Pasch hacia la "definición implícita", es decir, hacia la generalización del fenómeno de la dualidad (sólo Peano y Hilbert darían ese paso en el camino de lo convencional). Para Russell era aún imposible, como lo fue durante mucho tiempo, admitir la existencia de un "primitivo" que, no obstante, fuese convencional.¹⁴ A pesar de que, bajo la

¹³ La teoría relacional del espacio sufriría en Russell una rara evolución. Sería defendida hasta la influencia de Moore (con su predominio de lo absoluto), momento en que se rechaza. En POM se defiende explícitamente la teoría absoluta pero, al mismo tiempo, las dificultades técnicas para lograr definiciones satisfactorias en geometría llevan a una cierta aceptación de la relatividad (véanse mis 1988d y 1991, cap. 4). Por último, la influencia de Whitehead (y la teoría de la relatividad) llevaron, definitivamente, a deshacer el espacio absoluto (aunque sin renunciar a las relaciones *externas*, incompatibles con la relatividad).

¹⁴ Se equivoca, pues, Bonsantini cuando (1970, 416) escribe que la interdefinibilidad le parece contradictoria a Russell "perché egli parte del preconconcetto, di probabile origine kantiana di pensare lo spazio, anziché come il campo delle relazioni e degli enti geometrici, fisicamente come una specie di cornice vuota, come «nient'altro che un insieme di relazioni». Además, fue más bien Leibniz quien le proveyó de la teoría relacionista.

influencia de Bradley, estaba en situación de apoyarse en la insustancialidad común de las cosas y las relaciones. Ello puede ser un indicio de que fue el prejuicio de lo absoluto, más que el rechazo de Bradley, lo que le instó a dejarse llevar por la posterior influencia de Moore.

Estas mismas dificultades le impidieron aceptar la posibilidad de otras construcciones que, si bien se aceptan "técnicamente", son rechazadas como alternativa filosóficamente válida destinada a "eliminar" los conceptos correspondientes. Me referiré brevemente a los casos más ilustrativos.

Respecto al concepto de *curvatura* de Gauss, Russell se muestra incapaz de apreciar su inmenso poder como definición constructiva. Admite su valor técnico, pero no ve la posibilidad de abandonar la firme base de la intuición.¹⁵ Así, considera admisible la construcción de Gauss, que se apoya todavía en algo intuitivo (el plano) para medir la divergencia. Pero protesta al rebasar (con Riemann) las tres dimensiones, denunciando el carácter confunde del concepto de curvatura aplicado de forma general: "la 'medida de la curvatura' de una multiplicidad de n dimensiones es una expresión puramente analítica, que tiene sólo una afinidad simbólica con la curvatura ordinaria" (FG, 17). El recurso a lo "ordinario" (sentido común) no puede ser más claro.

La crítica de Riemann se extiende también a su noción de *multiplicidad* [variedad]. El argumento central es que con ella se introducen ideas métricas al definirse una multiplicidad como un conjunto de magnitudes (cantidades). Dice Russell que el error de Riemann procede de una visión (la de Herbart) del espacio como construcción serial de puntos, que impide ver en él, como intuición, la relatividad de posiciones y las antinomias a que ésta da lugar (la dualidad) impidiendo, finalmente, partir de puntos. Añade Russell que la multiplicidad, como concepto capaz de varias determinaciones, no logra acotar terreno conceptual que no pueda ser ocupado por conceptos diferentes, prueba de que Riemann construyó *ad hoc* un concepto ficticio pensando en las propiedades del espacio (FG, 66). Se trata de una crítica curiosa, sobre todo por ser aplicable a su propio concepto de *forma de exterioridad*, que también pretende (véase sección 5) abarcar principalmente el espacio, con el agravante de que, lejos de limitarse al aspecto matemático, incluye propiedades filosóficas (kantianas). Ello no impide a Russell insistir en la inutilidad de definir el espacio construyendo un concepto más general, sobre la base de que ya tenemos una concepción intuitiva de él que no necesita tales atavismos escolásticos (FG, 83).

¹⁵ Con ello se separa, inconsciente pero completamente, de Kant. Como veremos más adelante, éste consideraba posibles las construcciones matemáticas únicamente cuando se apoyaban en la intuición.

Si rastreamos las fuentes de Russell encontramos inmediatamente que estas críticas parecen proceder de Stallo 1882, obra que Russell conocía muy bien y que cita en ocasiones (aunque *no aquí*). Stallo dedica todo un capítulo (el 14) a la famosa memoria de Riemann. Sus críticas básicas son cinco: (i) cae en el error de deducir la naturaleza de una cosa (el espacio) de nuestro concepto de ellas; (ii) se deja llevar por el viejo modo escolástico de entender la definición (por género y diferencia), por lo que confunde concepto y definición y no ve que su concepto supremo (el de *multiplicidad*) exigiría otro no amplio, que no podría ser más que el de *cantidad*; (iii) el espacio no es un *manifold extended multiple*; el término *Mannigfaltigkeit* lo tomó Riemann de Gauss (que lo usó para referirse al espacio en general) quien, a su vez, lo tomó de Herbart y Kant, olvidando con ello que el espacio es esencialmente continuidad; (iv) la posibilidad conceptual (mera consistencia) no implica la realidad empírica (correspondencia con la sensibilidad). (Apoyándose en esta idea Russell *añadió* el aspecto intuitivo a los axiomas a través de su *forma de exterioridad*. Con ello rebasa el mero formalismo de los axiomas comunes a toda posible geometría.)¹⁶ Por último, (v) las cantidades continuas no están coordinadas con las discretas, a menos que creamos que los signos han de corresponderse con su significado. Se trata de una nueva confusión relativa al concepto de cantidad.¹⁷ Como veremos (sección 5) también Stallo constituyó su fuente principal a la hora de encontrar un concepto que aunase la metageometría, Kant y el aspecto técnico aceptable de Riemann. Baste aquí dejar conciencia de tan fuerte "influencia". Lo cierto es que Russell no logró rebasar su visión de sentido común y la trayectoria bradleyana hasta poder apreciar las implicaciones de la obra de Riemann.

Sin embargo, donde tales prejuicios se ponen de manifiesto con mayor claridad es en su crítica al concepto de *distancia* de Cayley y Klein, a pesar de que su rechazo parece contradecir la tendencia de esa construcción (que se ve obligado a aplaudir pues coincide con sus propios objetivos) hacia una presentación de la geometría métrica como "rama" de la proyectiva. El argumento que le sirve de apoyo es sólo su impresión de que Cayley y Klein convierten el asunto en un problema de definición y no en algo relativo a la naturaleza del espacio (FG, 30). Su esencialismo le sale inevitablemente a relucir cuando se da cuenta de que para Cayley las geometrías no euclidianas pueden aplicarse, en el espacio euclídeo, con sólo alterar la definición de

¹⁶ En 1896b (p. 128) Russell escribió: "The justification of a definition lies in the absence of contradiction in its results. Thus general Geometry is apodeictic, but the decision between Euclid and non-Euclid is empirical". Se trataba de una paráfrasis de la postura de Lechallas, pero Russell parece haber adoptado una postura semejante.

¹⁷ Desgraciadamente Russell no tomó de Stallo su visión, totalmente contemporánea, del lenguaje como vehículo a través del cual obtenemos y desarrollamos toda una metafísica.

distancia (FG, 29). Sin embargo, podría esperarse que aquí Russell hubiese reaccionado con tolerancia, como hizo con la definición de paralelismo, ya que también de ella dependía la obtención de una geometría o de otra.¹⁸ La diferencia es que la definición de Lobachevski era *compatible* con la noción intuitiva de paralelismo. En cambio ahora habría que considerar la definición de distancia como algo completamente arbitrario, que dejaría de lado el problema filosófico de la *naturaleza* del espacio, reduciéndolo todo a un asunto de "convención y conveniencia matemática" (FG, 30).

Russell no podía, obviamente, aceptar semejante planteamiento. Pues partía de la base de que la metageometría amenazaba a Kant y no veía más solución que, por un lado, considerar aquella geometría sólo en lo que tenía de común con la euclidiana, y, por otro, reformular el concepto de espacio de Kant para hacerlo compatible con ello. Por lo tanto el espacio y las relaciones básicas que permite establecer entre sus elementos *no pueden ser convencionales*, a riesgo de convertirse en una mera ilusión humana. Una de las condiciones necesarias que han de cumplirse es que el paso de la geometría proyectiva a la métrica sea también algo dado a priori. Lo que exige un concepto intuitivo de *distancia*, dado de una vez por todas y que después podamos aplicar a las diversas "distancias" particulares. Por eso la supuesta reducción de las propiedades métricas a proyectivas, aunque digno de elogio como recurso "técnico", carece de trascendencia filosófica al olvidar la necesidad de justificar también lo presupuesto en toda medición posible, que es siempre un concepto determinado y fijo de distancia.

La discusión a la que Russell somete el problema es muy técnica y no estoy seguro de entenderla bien, pero por su extremo interés para el problema de la intuición y el lenguaje ordinario me refiero a lo esencial de ella en lo que sigue (FG, 30-9). Russell reduce el problema a una confusión "natural" sobre la esencia propia de las coordenadas proyectivas, ya que éstas sólo tendrían sentido a partir de la distancia. Klein evita el error lógico al introducir las coordenadas de manera completamente descriptiva y definir la distancia a partir de ellas. Pero Russell protesta precisamente por el abuso del lenguaje ordinario que ello supone. Según él, la introducción del término "distancia" implica necesariamente, por su significado propio, ideas métricas, a pesar de que las coordenadas que la definen (en Klein) sean proyectivas. Tampoco cabe definir *el término* de manera convencional; con ello agravaríamos la confusión al introducir una diferencia entre el significado *aparente*

¹⁸ Con esto no niego que las geometrías no euclidianas puedan ser expuestas definiendo las paralelas como aquellas líneas que, estando sobre el mismo plano, no se cortan, sino recordar que la geometría euclidiana presupone la equidistancia, que es como intuitivamente visualizamos el paralelismo.

de nuestras proposiciones y el significado *real* proveniente de la nueva definición (FG, 33).

Por eso la distinción entre la geometría euclidiana y la no euclidiana no es un problema de definición. De hecho *no hay más que una distancia*: la relación cuantitativa apoyada en una identidad de cualidad (FG, 33). Mediante la definición proyectiva de la razón anarmónica prescindimos, es cierto, de la relación entre *dos* puntos, sustituyéndola por otra relación entre *cuatro*, pero para ello hemos de hacer fijos dos de ellos y admitir una relación que los una, y esta relación, por arbitraria que sea, no puede ser otra que la distancia en sentido ordinario (FG, 34-5). Con ello acabamos finalmente apoyándonos en el concepto intuitivo que se trataba de eliminar y la distancia continúa siendo una relación entre *dos* puntos: "el no percibir que el sentido proyectivo difiere del sentido ordinario y no puede reemplazarlo ha hecho surgir los puntos de vista de Klein y Poincaré.¹⁹ No se trata, sin embargo, de una cuestión de convención, sino de las irreductibles propiedades métricas del espacio" (FG, 35-6).

Por consiguiente, el problema no es meramente técnico. La distancia tiene, para Russell, una naturaleza intrínseca que aprehendemos a través de la intuición inmanente al lenguaje (a su significado). Ello impide eliminar la cosa eliminando la palabra, pues la distancia no es sólo un término, sino sobre todo, *una de las propiedades fundamentales del espacio* (FG, 36). Así, mediante el recurso a la teoría referencialista de Bradley, Russell encuentra la forma de apoyar las intuiciones tradicionales. El complemento perfecto lo constituye el recurso a la *forma de exterioridad*, ya que la distancia sería su característica métrica, por lo que ningún recurso técnico puede suplir su aprehensión. Aquí, Russell se apoya también en el convencimiento de que la imaginabilidad de un complejo depende de la de sus partes; en cierto sentido sigue siendo, pues, fiel a Kant; y si mantiene la distancia en sentido ordinario es porque, para él, forma parte de una noción que, a su vez, informa toda posibilidad de conocimiento de objetos por parte de los seres humanos. En cambio, podría haberse percatado de que Kant hubiese estado en un grave apuro si hubiese visto que la "distancia" de Cayley-Klein puede construirse, ya que estaba convencido de que no hay construcción sin intuición (véase, sin embargo, Torretti 1974 para lo que Kant llamaba "construcción simbólica"). El único criterio de Russell para llegar a considerar la definición intuitiva (métrica) de la distancia como "la única definición adecuada" (FG,

¹⁹ Russell cita a Poincaré por considerar que su teoría de los axiomas como definiciones disfrazadas depende lógicamente del problema concreto de la definición de distancia (véase FG, 33 y 113). No ve que la famosa tesis de Poincaré es mucho más amplia y está también en función de toda una concepción de la ciencia, el lenguaje y la experiencia, muy lejana al esencialismo y al referencialismo de Russell.

37), es decir, para proclamar abiertamente su esencialismo, es, por tanto, un Kant malentendido y una serie de prejuicios sobre la naturaleza del lenguaje. Su horror al convencionalismo es, ahora, la fuente de su creencia en que la distancia "es una relación metafísica entre puntos que la función distancia no hace más que expresar" (Torretti 1978, 308). Tendremos ocasión de topar con semejante esencialismo en otras muchas ocasiones.

4. Análisis y deducción

Me interesa ahora investigar: (i) hasta que punto las dos "deducciones" russellianas pueden identificarse con las de Kant; (ii) qué tipo de "análisis" es el que emplea Russell; y (iii) si es válida la comparación de Russell de su doble proceso con el doble proceso según el cual Kant diferenciaba los *Prolegómenos* de la *Crítica*. Conviene recordar que, a diferencia de los artículos previos, en FG Russell introduce la diferencia entre geometría proyectiva y métrica, por lo que, como defiende la validez de los axiomas para ambas geometrías (al igual que la forma de exterioridad), se ve obligado a repetir, en ambos casos, tanto el análisis como la posterior deducción. Para no repetir, consideraré los argumentos de manera unitaria.

Me he referido ya al planteamiento general de Russell (sección 2). En esencia, lo que pretende es aportar la base necesaria para fundamentar la aprioridad de la geometría (lo que no puede lograrse con la noción hipotética de necesidad). Para ello tratará de *analizar* los razonamientos empleados en la geometría hasta encontrar los axiomas presupuestos y, posteriormente, *deducir* esos mismos axiomas del elemento que hace posible, a priori, la experiencia espacial: la *forma de exterioridad* (los axiomas se repiten en geometría métrica añadiendo la distancia). El carácter doblemente a priori de los axiomas dependerá, pues, de su papel esencial tanto para la existencia de toda geometría como para la experiencia de todo mundo externo (FG, 52).

Vimos también que Russell escoge ese planteamiento para responder a las dudas creadas por la metageometría en relación con la filosofía de Kant, por considerar que la nueva geometría hacía posibles varios "espacios", mientras que los argumentos de Kant aseguraban sólo una forma de exterioridad más abstracta y conceptual que el espacio real (FG, 56). La tarea es, pues, la de complementar a Kant hasta mostrar que la geometría *usa* los axiomas y que estos configuran la esencia de tal forma de exterioridad. Ello supone en realidad intentar una postura intermedia entre Kant y la metageometría (apoyándose en Stallo; véase sección 4). Pero, ya de entrada, el planteamiento de Russell genera dudas sobre su intento, si es que lo hubo, de llevar a cabo una auténtica *deducción trascendental*. Da la impresión de que, si lo que falló en Kant fue el paso de la geometría al espacio, lo que llama

Russell deducción trascendental tendría que ser, más bien, su fase de análisis, que es la que de hecho *encuentra* los axiomas en la geometría. A la inversa, parece que la segunda fase, al ser independiente de la geometría (pues parte de la forma de exterioridad, que es general), tendría que recibir el calificativo de *metafísica* y no el de trascendental. En su momento volveré sobre el tema.

En todo caso, no hay que olvidar que Russell limita toda su obra al esfuerzo de mostrar, no el espacio, sino esa forma de exterioridad común a la geometría proyectiva y a la métrica, llevando mucho más allá sus intentos de artículos anteriores.²⁰ Es la introducción de esa *forma* lo que va a constituir el núcleo de la posibilidad misma de toda geometría y, empíricamente, de todo espacio real. Por ello cumple la función de hacer posible el círculo de los dos procesos (el analítico y el deductivo). Además, al ser, a la vez, experimentada (a través del espacio, que es una "variante" suya) y coincidente con las "condiciones lógicas" (FG, 98) comunes a todos los espacios posibles (a través, sobre todo de la relatividad de posición u homogeneidad), sirve de base también para los espacios no euclidianos. El carácter confusamente lógico y epistemológico de esta *forma* aparece en el momento en que esos espacios sólo son posibles, según Russell, en el sentido de que cumplen aquellas condiciones: el resto (Euclides) es empírico.²¹

Paso a referirme ahora a los tres objetivos que expuse al comienzo de esta sección, es decir, (i) el análisis, (ii) la deducción y (iii) la comparación con Kant.

(i) El análisis que Russell lleva a cabo a la busca de los axiomas de la *geometría proyectiva* (FG, 126-34) es claramente *ad hoc*. Sabe que *tiene que*

²⁰ El origen del doble proceso parece gradual en Russell. En 1896a aparece sólo el primer argumento, añadiéndose el segundo en 1896c, con objeto de mostrar cómo esos axiomas son condiciones necesarias de cualquier forma de exterioridad. Según la introducción a 1896c (de los editores de 1983), este segundo argumento no debió formar parte de la disertación russelliana (de la cual sí era parte 1896a) puesto que él mismo defiende en 1896c las superiores virtudes del enfoque trascendental, lo que sin duda le hubiese hecho incluirlo en ella. En Couturat 1896 hay un doble proceso parecido (en la introducción a la segunda parte), pero es dudoso que Russell hubiese tenido tiempo de dejarse llevar por la idea pues 1896c fue ya leído públicamente en marzo de 1896 (y publicado en julio), mientras que la copia en poder de Russell de la obra de Couturat (1896) está fechada en julio de 1896 (según comunicación personal de Kenneth Blackwell). Lo más probable es que tomase la idea directamente de Kant (además, en 1902 el libro de Couturat está registrado como leído en agosto de 1896). Un antecedente de la aplicación doble del enfoque "metafísico" seguido del "trascendental" aparece, no obstante, en 1893 de Russell (pp. 129-30).

²¹ Escribe Russell sobre tales "espacios": "They are, in short, a step in a philosophical argument, rather than in the investigation of fact: they throw light on the nature of the grounds for Euclid, rather than on the actual confirmation of space" (FG, 98).

encontrar los mismos axiomas disponibles ya en la métrica desde el momento en que decidió añadir el desdoblamiento en las dos geometrías (que no está en los artículos). Así que la forma en que realmente se establecen queda un tanto oscura.

El único que surge con nitidez es el axioma de la homogeneidad del espacio, que aporta la homogeneidad necesaria para las transformaciones proyectivas (en la terminología moderna se diría que la acción transitiva del grupo de transformaciones constituye la homogeneidad, como me comenta Roberto Torretti). Si las propiedades internas de las figuras se conservan, independientemente de las diversas relaciones externas que vayan adquiriendo, entonces es que todas las partes del espacio son cualitativamente similares, es decir, que los cambios afectan sólo al espacio ocupado. Por tanto, la homogeneidad y la relatividad "están presupuestas" en la comparación espacial cualitativa, objeto de la geometría proyectiva FG, 134).

El axioma de divisibilidad infinita (o axioma del punto), parece estar presupuesto, dice Russell, en la similaridad cualitativa entre todos los puntos, que sólo podrían distinguirse mediante la cantidad (inexistente en geometría proyectiva). Lo mismo sucede con la divisibilidad en sí, que parece exigir indiferencia espacial. El problema surge al aparecer el hecho de la interdefinibilidad, que no puede admitirse en geometría proyectiva, donde las líneas y los planos se dan íntegramente, sin que puedan verse como compuestos de puntos (FG, 138). Por este motivo surge la necesidad de introducir puntos *reales* en el capítulo final de la obra (la *materia* geométrica). El tercer axioma (de dimensiones) resulta más difícil si cabe. Russell se limita aquí a argumentar que se halla presupuesto en la necesidad de establecer un límite a las construcciones a partir de algún número de puntos (FG, 132), y a insistir en que, de no ser así, la geometría sería imposible (remitiendo a la sección paralela en geometría métrica).

El propio Russell se da cuenta de lo dudoso de su análisis (que presenta súbitamente los axiomas sin que se vea claro el punto exacto de donde surgen). Por eso admite que los axiomas establecidos no excluyen la posible validez de otros que pudieran también darse, aunque, eso sí, incluyen todo lo necesario para la geometría proyectiva. Con lo cual parece admitir que proceden más del intento heurístico-constructivo de dar cuenta de los logros básicos de la geometría proyectiva que del resultado de un auténtico análisis. Incluso escribe que todos ellos "son filosóficamente interdependientes y pueden, por lo tanto, ser enunciados de muchas formas" (FG, 132), lo cual sólo puede significar una cosa: que son propiedades de *un mismo concepto*. Naturalmente ese concepto es la forma de exterioridad, que Russell se esfuerza en construir desde el principio. Nuestro análisis del proceso deductivo confirmará esta apreciación.

En la *geometría métrica*, el axioma de libre movilidad queda presupuesto por la necesidad de un criterio de igualdad espacial que posibilite la comparación mediante la superposición. Por tanto, la aplicación del concepto de magnitud presupone (*involves*) la libre movilidad (FG, 149-50). El axioma de las dimensiones se aclara algo aquí, pero al precio de identificar relación y dimensión. El argumento es: las posiciones sólo pueden definirse completamente mediante algún número finito de relaciones y, como cada relación es un dimensión, ha de haber un número finito (y entero) de ellas (FG, 161). Por último, el axioma de distancia parte de la libre movilidad (ya vimos que los axiomas son interdependientes), que garantiza la permanencia de la relación existente entre dos puntos a través de cualquier movimiento. Esa relación "intrínseca" es la distancia (véase sección 3), que sólo puede medirse a través de la línea recta (si se escogiera una curva para ello, sólo podría cumplir su función al analizarla en rectas infinitesimales) (FG, 164-71).

Considerar todo ello un *análisis* que obtiene los tres axiomas vuelve a resultar difícil. Se repite el hecho de que sólo el primero de ellos parece proceder de un proceso semejante. El segundo se logra mediante la identificación inexplicada de relación y dimensión y en el tercero se reconoce la dependencia lógica del primero (por lo que se trataría más bien de una deducción). Pero incluso la libre movilidad se reduce a una sola consideración: sólo podemos medir por superposición con lo que este argumento, de carácter práctico, remite a la homogeneidad del espacio, que es el dogma básico de toda la obra. A partir de él Russell afirma, una y otra vez, la necesidad de considerar sólo espacios de curvatura constante, los únicos que permiten esa relatividad de posición; y ello porque, esclavo de su dependencia para con Kant, se ve obligado a no separar la geometría abstracta (matemática) de la geometría física. Lo que, finalmente, constituye un refugio en la intuición, desde la cual valorar lo que de posibilidad "matemática" tengan otros espacios.

Su postura no parece ser más que una repetición (sin reconocer) del modo en que Hannequin (1895) había valorado la importancia de la homogeneidad en el marco de la filosofía kantiana. Para Hannequin (que también parece apoyarse en Stallo 1882 y sus críticas a Riemann), los argumentos de Kant son inquebrantables por las "nuevas" geometrías (p. 365), las cuales parten de un espacio general (del cual los diversos espacios particulares derivarían mediante *diferencias*) que no es más que una construcción artificial basada en los elementos del espacio real (que luego *deducen*). La prueba es que, según Hannequin, la recta en general no tendría sentido para nosotros sin la recta euclídea; ni la curvatura sin el radio que la define, que es también una recta. Por todo ello, la homogeneidad es imprescindible tanto en cualquier especulación geométrica como en nuestra sensibilidad (como muestra

el tercer argumento de Kant), sin que podamos crearla dando un valor infinito al radio de curvatura del espacio general, ni basándonos en el entendimiento lógico (p. 366). No podemos, pues, superar la síntesis implícita en nuestra apariencia intuitiva del espacio: "La verdad es que el Espacio posee una naturaleza anterior a los conceptos, que yo *construyo*, sin duda, pero que no puedo *construir* más que si me es dado" (p. 367). Todo ello equivale, en la misma forma que en Russell, a situar la homogeneidad como fundamento de toda geometría (como propiedad común al espacio euclídeo y al no euclídeo) y también a considerar que el espacio no euclídeo no puede pasar de mero recurso técnico-matemático falto de la intuición correspondiente²² (antes vimos como Russell transformaba el espacio kantiano en forma de exterioridad para dar cabida a tales espacios no intuitivos).

No cabe, pues, más conclusión que descalificar como *análisis* el procedimiento mediante el cual Russell *llega* a sus tres axiomas. Más bien proceden del prejuicio según el cual la geometría ha de cumplir ciertas condiciones *intuitivas* que de hecho escapan de la problemática de su auténtico valor como ciencia; y ello desde los propios presupuestos de Russell. Se trata, por el contrario, de un análisis al estilo bradleyano, donde los conceptos se transforman unos en otros (como en Hegel), añadiendo diversas consideraciones y sometiendo a diferenciaciones y transiciones completamente determinadas (el hecho de que aquí se trate de axiomas no cambia la sustancia de tal procedimiento).

Como segundo punto de nuestra conclusión hemos de confirmar la imposibilidad de asimilar este primer paso con la deducción *metafísica* de Kant. Como ya adelanté más arriba, hay aquí indudablemente una grave confusión. En primer lugar, Kant no habla para nada de *deducción* metafísica en la Estética, sino de *exposición*. En segundo lugar, entiende por exposición, no el establecimiento de las condiciones del espacio partiendo de la geometría (como hace Russell en su primera fase), sino justamente lo contrario: "La exposición es *metafísica* cuando contiene lo que nos muestra el concepto *en cuanto dado a priori*" (B 38). Es la exposición (o "deducción") trascendental la que, por exigir la relación de los conceptos con otros conocimientos a priori, requiere la demostración de que un concepto es el principio a partir del cual pueden surgir otros (B 40-1). Indudablemente aquí jugó el factor com-

²² Por eso tiene razón Bonfantini cuando escribe que no convencen las críticas de Russell a la tesis de Helmholtz que establece la homogeneidad del espacio como una propiedad empírica extraída de nuestra experiencia (con los cuerpos rígidos). Lo que lleva a Russell a mantener que no podemos comprender la geometría sin partir, a priori, de esa rigidez; o sea, de la posibilidad de reconocer los cambios sólo partiendo de la libre movilidad. Russell defiende la homogeneidad, según Bonfantini, para romper ese círculo: "il concetto di rigidità implica la comparazione spaziale e la misura, la misura a sua volta la conservazione della lunghezza, cioè la rigidità" (1970, 409).

parativo con lo que Kant llama *deducción* metafísica en la Analítica; allí sí que hay un análisis: el de las categorías presupuestas en los distintos tipos de juicios. Pero en este caso falta la sensibilidad, *única facultad que puede aportar intuiciones*, por lo que aquí la forma de exterioridad de Russell no cumplirá papel alguno. Volveré sobre el tema tras haber examinado el paso deductivo.

(ii) Consideraré la *deducción* también de forma separada, es decir, primero en relación a la geometría proyectiva y después a la métrica. Pero no entraré de lleno en la noción de forma de exterioridad (que será objeto de la sección siguiente), limitándome a describirla como el principio que diferencia las percepciones.²³

En *geometría proyectiva* Russell presenta la deducción (p. 136-40) como un proceso *converso* al del análisis (el cual resulta presentado, pues, también como deducción, según el "doble proceso"). El tipo de argumentación es similar al anterior, es decir, de carácter hegeliano a través de transiciones (eslabones de una cadena). Con ello se destaca la dependencia entre los axiomas, pero no se distingue entre la definición del concepto inicial (la forma de exterioridad); sus propiedades y los axiomas deducidos. Veamos el argumento.

Partiendo de la exterioridad (propiedad de ser distinto de otra cosa) llegamos en seguida a la relatividad de posición, pues siendo aquélla algo puramente abstracto, las meras posiciones no pueden diferenciarse cualitativamente, lo cual no es más que la *homogeneidad* (axioma 1). Pero, como la exterioridad es susceptible (gracias a la homogeneidad) de alteración continua y se ve caracterizada (como *forma*) sólo por el conjunto de las relaciones posibles, es susceptible de *divisibilidad infinita* y, por ello, puede considerarse como un conjunto infinito de elementos (axioma 2).²⁴ El siguiente paso parte del hecho de que las posiciones sólo pueden determinarse (por la relatividad) a partir de un número finito (y entero) de relaciones con otras posiciones, lo que equivale (identificando relación y dimensión) al *axioma de dimensiones* (axioma 3). Con ello queda acabada, según Russell, "nuestra deducción de la geometría proyectiva desde las propiedades conceptuales *a priori* de una forma de exterioridad" (FG, 146). Ha de admitirse, pues, que no

²³ El propio Russell utiliza un planteamiento semejante: "What we have to do here is not to discuss whether there is a form of externality, but whether, if there be such a form, it must possess the properties embodied in the axioms of projective Geometry" (FG, 136).

²⁴ Todas las formas se compondrían, a través de alguna construcción proyectiva, de puntos, líneas o planos, aunque estos últimos no estén, en rigor, hechos de partes. Ya hemos visto cómo este planteamiento llevará a contradicciones relacionadas con el principio de dualidad, que sólo se "resolverán" introduciendo la "materia" (véase la sección 6).

queda clara la posibilidad de considerar los axiomas como deducidos de esa *forma* (que no es más que una construcción "intelectual"), ni tampoco la garantía que existe de que se trate de auténticas propiedades de esa forma pura, si, al parecer, la única manera de conocerlas es el análisis de su uso concreto en geometría. Una vez más, Russell construye el concepto de forma de exterioridad a partir de los mismos axiomas que quiere extraer de ella. No es extraño que use después como sinónimos la relatividad, la homogeneidad y la exterioridad.

En *geometría métrica* la deducción se desarrolla de forma muy parecida (FG, 160-72): La *libre movilidad* (axioma 1) se deduce a la homogeneidad (a la que prácticamente equivale), pues sólo ésta garantiza la constancia de las figuras, lo que equivale a deducirla de la exterioridad (pues la homogeneidad depende de ella). De ahí se deduce también el *número finito de dimensiones* (axioma 2), con el consabido argumento de las posiciones y las relaciones (véase más arriba), añadiéndose sólo que ese número finito es *a priori* necesario. Por último, se deduce el *axioma de la distancia* (axioma 3), argumentando que como toda posición es relativa, dos puntos cualesquiera deben tener alguna relación entre sí, que ha de permanecer idéntica a través de los cambios (pues la exterioridad es homogénea), por lo que ha de ser intrínseca y, además, perceptible (ya que la forma de exterioridad lo es). Naturalmente esa relación es la distancia (y su figura única, la línea recta).

¿Es esto una deducción "trascendental"? Russell, sin mucha convicción, utiliza a veces el adjetivo,²⁵ entendiéndola además al estilo kantiano, es decir, como una *justificación* de que lo ya encontrado (por otros medios) es efectivamente *a priori*. Por eso escribe que la deducción indica "el fundamento para considerar como *a priori* las propiedades de cualquier forma de exterioridad", y añade que "este fundamento es trascendental, esto es, debe hallarse presente en las condiciones requeridas para la posibilidad de la experiencia" (FG, 178). Pero, si comparamos lo que *de hecho* lleva a cabo Russell con la deducción trascendental kantiana, las cosas distan mucho de estar claras. Primero porque Russell quiere abarcar, a la vez, los axiomas concretos (como dados *a priori*) y también la misma *forma de exterioridad*, cuyas propiedades se identifican (al final) con los axiomas, pero *cuya esencia es conocida sólo cuando ellos aparecen*. Y segundo, porque, como decía más arriba, parece haber una confusión entre la Estética y la Analítica.

²⁵ Aunque de una forma poco clara: "...some of the axioms are susceptible of a transcendental proof" (FG, 74); "...we shall pass, from mere analysis, to a transcendental argument" (*ibid.*, 132).

Si recurrimos al propio Kant, a primera vista parece existir coincidencia. Así, en la Estética, la *exposición trascendental*²⁶ es la explicación de un concepto con el que entender otros conocimientos a priori (B 40-1), y en la Analítica la correspondiente *deducción* reconoce los conceptos puros "como condiciones *a priori* de la posibilidad de la experiencia" (B 126-8). Pero Russell se dejó llevar por esas descripciones generales y no por el contenido concreto de lo realizado por Kant, pues Russell no reduce en ningún lugar sus conceptos (o axiomas) a la unidad de la apercepción del yo, que es la base a través de la cual Kant muestra como las facultades del entendimiento coinciden con las categorías. Además, la deducción trascendental opera en el momento en que las categorías son aplicadas al espacio y éste se plantea como algo más que una intuición, momento en el que aparecen sospechas sobre su validez objetiva y se convierte en equívoco "dicho *concepto de espacio* al tender a emplearlo más allá de las condiciones de la intuición empírica" (B 120-1). Hemos de convenir, pues, en que *tal problema no se da en la geometría*, en la que no se rebasa la intuición sensible, sino sólo en la filosofía; y esto es lo que no puede hacer Russell, a riesgo de dejar en la cuneta las "otras" geometrías. La solución que escoge, como hemos visto, consiste en intentar abarcar toda geometría con la sensibilidad *a través de un concepto forjado por el entendimiento*, lo que obviamente sería rechazado por Kant, para quien la geometría es a priori sólo porque procede de la intuición.²⁷

Por todo ello, no es admisible la calificación de *trascendental* para el segundo paso russelliano. El proceso de Kant es mucho más complejo e implica la utilización necesaria de las categorías, pero nunca de axiomas, que, por estar basados únicamente en la intuición, sólo valdrían (para él) en las ciencias exactas, pero no en la filosofía. Torretti, (1978, 303) califica la deducción de Russell de más ambiciosa que la de Kant, aduciendo que éste no hubiese admitido nunca que un axioma concreto fuese condición de la experiencia,²⁸ lo que es cierto. Pero sólo por lo dicho más arriba: ni puede existir

²⁶ Sin embargo, más adelante se refiere al proceso con la expresión *deducción*, p. ej. en B 119-21.

²⁷ Este fragmento es definitivo: "La Geometría sigue su camino seguro utilizando conocimiento enteramente *a priori* sin necesidad de pedir a la filosofía un certificado de la procedencia pura y legítima de su concepto básico de espacio. Pero el empleo del concepto en esta ciencia afecta sólo al mundo externo sensible, de cuya intuición el espacio constituye la forma pura y en el que, por consiguiente, todo conocimiento geométrico es inmediatamente evidente por basarse en una intuición pura" (B 120-1). Véase, sin embargo, Torretti 1974 al respecto.

²⁸ En este sentido, los editores de Russell 1983 escriben (en su introducción a 1896c) que el procedimiento de Russell, consistente en transferir el argumento trascendental de la geometría métrica a la proyectiva (que no se trataba en 1896c), "opens a gap in his argument in the Essay, for, in order to show that general metrical geometry is a priori, he

deducción sin el recurso a la apercepción, ni ésta puede prescindir de la interacción entre la sensibilidad y en entendimiento (que no utiliza axiomas).

El proceder de Russell, en consecuencia, no es más que una repetición del proceso inicial mediante las consabidas transiciones (apoyadas en sinonimias forzadas). Ya Moore calificó de fútil la supuesta deducción "pues el atribuir necesidad a la forma de exterioridad puede sólo significar que se halla presupuesta en la experiencia real (*actual*), lo cual había sido ya mostrado para los axiomas" (1899, 400). Se ha alegado (Bonfantini 1970, 375) que también Kant es circular en este punto, al presuponer primero la concordancia entre geometría y experiencia y deducirla después. Pero, en todo caso, Kant no pretendió rebasar el marco de la intuición (su geometría no le obligaba a ello).

(iii) Llegó así a mi tercer objetivo: ayudarnos con la célebre comparación kantiana entre los *Prolegómenos* y la *Crítica*. Para Russell las dos fases se hallan interrelacionadas en el sentido de constituir deducciones *conversas*. Al parecer pensaba que cualquier argumento que pudiera darnos información sobre la objetividad de algo, podía, por lo mismo, ser vuelto del revés e informarnos también sobre toda forma de intuición en la que esa objetividad esté presente.²⁹ La comparación con los respectivos procesos de las dos obras de Kant puede realizarse, escribe Russell, "muy toscamente (*roughly*)", lo cual es innegable. Pero también la comparación está desenfocada. Según Kant, la *Crítica* se expuso de forma "sintética" e orden a presentar a la vista "la ciencia con todas sus articulaciones", mientras los *Prolegómenos* exponen de forma "analítica" esa ciencia, ya constituida, destacando "los puntos capitales" (*Prolegómenos*, prefacio). Por ello, la primera debe conducir el progreso de la investigación sin más apoyo que "las leyes de su puro empleo según principios"; en cambio, los segundos "deben apoyarse en algo que se conozca ya como cierto", sirviendo así de precedente a toda metafísica futura (*ibid.*, §4). Se trata, por tanto, de *exponer* un mismo contenido de dos formas diferentes. Sin embargo, Russell pretendía demostrar (en la segunda fase) que lo hallado en la primera (que partía de la geometría) era también deducible de una forma a priori. Por ello, lejos de exponer un mismo contenido, pretendía llegar a las mismas conclusiones partiendo de premisas diferentes. Hemos de concluir, pues, que tampoco la comparación con Kant se sostiene en este punto.

would need to show in addition that the possibility of measurement was a necessary condition of any form of externality" (1983a, 289). Supongo que Russell quería evitar (sin lograrlo) precisamente esto: presentar axiomas específicos (históricos) como condiciones de posibilidad de toda experiencia.

²⁹ Véase, por ejemplo, FG, 95, donde aplica este argumento a Lotze.

5. La forma de exterioridad

Hemos llegado al concepto central de la obra. Sólo aclarando su estatus podremos valorar hasta qué punto puede cumplir las funciones que Russell le asigna. Sin ellas no sería posible la articulación entre el "análisis" y la "deducción", con lo que la estructura de la obra se vendría abajo. Igualmente hemos de plantearnos si esta *forma* puede considerarse una *construcción* al estilo de las que los geómetras suelen manejar, para lo que deberemos rastrear sus fuentes lejanas (Kant y Hegel) e inmediatas (sobre todo Stallo y Bradley).

Ante todo, ¿qué ha de entenderse por *forma de exterioridad* (*form of externality*)? Cuando introduce el concepto, Russell (1896c) se limita a describirlo como una forma de la que "psicológicamente" depende toda experiencia de un mundo externo; y, como experimentar algo implica alguna forma de exterioridad, ésta es también lógicamente previa a la experiencia. En FG, sin embargo, Russell suprime esa presentación rudamente kantiana y psicologista y añade cuatro "líneas" de explicación diferentes: (i) la de Kant-Bradley; (ii) la de Grassmann-Whitehead; (iii) la de Riemann, y (iv) la "axiomática". Sin embargo, en la práctica todas ellas parecen darse al mismo tiempo.

(i) La definición *oficial* de Russell parte de la diferenciación presente en toda percepción, que supone basada en un principio mediante el cual "las cosas presentadas sean distinguidas como diversas. Este elemento, tomado aisladamente y abstraído del contenido que él mismo diferencia, puede ser llamado una forma de exterioridad" (FG, 136). Russell cree que de esta forma ya ha aportado el elemento "lógico" (por cierto tomado de Bradley), destinado a complementar a Kant, mediante el cual hablar de *presuposición lógica*. En realidad se ha limitado a enunciar una condición práctica; o, como máximo, una equivalencia entre percepción y diferenciación. Es obvio que a partir de ahí puede deducirse cualquier cosa.

El elemento kantiano radica en la noción misma de diversidad y está ya en la Estética (como mostraré más abajo); Para Russell es evidente que ha de concretarse en una *forma* (si fuese una diversidad de contenido sería inseparable de lo concreto) que constituya la posibilidad de toda diversidad y que, abstraída de toda percepción sensible, aparezca como un residuo o principio puro de diversidad.³⁰ Pero, aunque se trate de una forma, se manifiesta

³⁰ FG, 136. En este epígrafe crucial Russell remite por dos veces a su último capítulo (el más filosófico). La primera referencia es para afirmar que allí se prueba que, efectivamente, la forma de exterioridad es el residuo referido. Sin embargo, lo que de hecho Russell lleva a cabo (pp. 182-6) es subsumir la diversidad de la percepción y la

sólo en la distinción misma entre objetos (o posiciones), con lo que llegamos al mismo resultado que Kant logra sin necesidad de introducir más noción que la de espacio.

(ii) Russell no debía sentirse muy seguro de las posibilidades matemáticas de una definición tan filosófica, así que pretendió reforzarla recurriendo a Grassmann (seguramente a través de Whitehead) y su distinción entre ciencias formales y fácticas. Pero, al consideraba esa distinción como epistemológica, presenta lo a priori como lo intelectualmente puro e inmutable (a menos que cambien las mismas leyes del pensamiento): "Seguiré, por tanto, la distinción de Grassmann *construyendo* una forma de exterioridad a priori y puramente conceptual" (FG, 135; cursiva mía). A partir de ahí inicia Russell su andadura deductiva hasta encontrar los axiomas a partir de esa forma, que se presenta, al mismo tiempo, como construida por ellos. Pero el término *construcción* no da mucho de sí aquí; parece que con él Russell se refiere aquí sólo a ofrecer un conjunto de axiomas más que un *concepto*. La prueba está en que con tal construcción, espera rebasar el marco del espacio real para, en una fase posterior, introducir algo realmente experimentado en esa estructura "vacía".³¹

(iii) Russell había criticado duramente el concepto de multiplicidad de Riemann (véase sección 3). Parece obvio, sin embargo, que su *forma de exterioridad* pretende también presentarse como concepto general del que el espacio sea un caso particular, lo que Russell reconoce explícitamente (FG, 178). La diferencia, que Russell se apresura a señalar, estaría en que la forma de exterioridad carece de propiedades cuantitativas. Sin embargo, como también reconoce Russell, la forma de exterioridad cumple "todas aquellas funciones que, en nuestro espacio real, son cumplidas por el espacio",³² lo cual es una característica típica de toda definición constructiva. Es el amargo destino de esta obra: en la medida en que sirve a la metageometría, traiciona a

unidad del entendimiento a través de la consabida herramienta bradleyana de la "identidad en la diferencia", con lo que vuelve a la forma de exterioridad como pivote. La segunda tiene por objeto mostrar la necesidad de asumir una forma de exterioridad como algo distinto de las mismas cosas relacionadas, pero lo que hace (pp. 193 ss.) es sólo destacar la posibilidad de sustituir el espacio por el *orden espacial* (véase la sección 7 del texto).

³¹ Véase, por ello: "If we construct a mere conception of externality, and thus abandon our actually given space, the result of our construction, until we return to something actually given, remains without existential import" (FG, 135). Debiendo entenderse la expresión "existential import" como algo parecido a "encarnarse" en algo real (el mismo significado que en 1898 de Whitehead).

³² FG, 178. Sin embargo, Russell se refiere con ello también a la necesidad de incorporar un correlato *material* a su mera forma, que suple con su noción de materia, como veremos en la sección siguiente. Así, ambas "construcciones" se apoyan mutuamente.

Kant (y a la inversa). Al tener que satisfacer a Kant, incluyó el aspecto epistemológico en su forma de exterioridad. Servidumbre que no tuvo Riemann, que era empirista y parecía entender mejor la distinción entre lo formal y lo empírico.

(iv) Como decía más arriba, Russell se acerca mucho a la identificación de su forma de exterioridad con un conjunto de axiomas. No sólo cuando habla de que la tal forma cumple las "condiciones lógicas" ejemplificadas por ellos (FG, 98); o cuando considera los axiomas como sus propiedades necesarias (FG, 136), sino, sobre todo, cuando *de hecho* utiliza constantemente la exterioridad como sinónimo de la relatividad (y del resto de las propiedades), dando así la impresión de que los axiomas "brotan" de ella y, al mismo tiempo, la definen (otro ejemplo en §173). Por eso llega a considerarlos como "adjetivos" suyos y, por lo mismo, "propiedades a priori de cualquier espacio posible" (FG, 122). Por todo ello, el acercamiento a la noción de definición implícita resulta innegable, aunque no se extraigan las consecuencias de un Grassmann o (posteriormente) de un Hilbert. Sólo el contacto con Peano y su escuela le permitiría, años más tarde, acceder a los nuevos métodos (aunque fuera de manera crítica), pero no deja de ser curioso que tales carencias se hallen asociadas en él a la incapacidad de ofrecer auténticas definiciones constructivas. Ni siquiera en POM, donde ofrece definiciones de varios "espacios" llega a admitir el método de la definición implícita (véanse mis 1988d y 1991, cap. 4). Su creencia en los "simples", de raíz mooreana, se lo impedía.

Es difícil extraer de estas cuatro líneas una definición clara del concepto. Ni siquiera el mismo Russell pudo aplicarlo con nitidez a juzgar por los lastimosos "círculos" con los que adorna cada proceso de análisis-deducción.³³ Las muchas funciones que su concepto se ve forzado a cumplir amplían tanto sus márgenes que impiden toda precisión (en esto se alejaría del estatus de *construcción*). Un estudio de sus fuentes servirá para comprender mejor esa diversidad interna; así, lo que resta de la sección se dedicará, sucesivamente, a su relación con Kant, Stallo, Hegel y Bradley.

Sobre Kant, ya adelanté más arriba que el espacio, como intuición pura, contiene ya todo lo necesario para aportar la diversidad que exige la forma de exterioridad de Russell. Pero su problema es que debe, además, presentar un concepto puramente "intelectual"; por eso lo presenta a la vez como *formal*, a priori, *construido* y presente en toda intuición perceptiva. Para Kant, sin embargo, los conceptos reciben ya hecha la diversidad de la intuición y la someten al proceso unitario de la apercepción. Pero Russell se obstina en

³³ El primero en la p. 101, el segundo en 161-4 y el tercero en 164 y 172-3 (siempre de FG).

que Kant demuestra algo (la forma de exterioridad) mucho más abstracto (FG, 60-2), que es también previo a toda experiencia posible, por lo que debe abarcar también la metageometría en su estructura más simple (los tres axiomas). Pero entonces, la tesis de Kant de que el espacio es una intuición y no un concepto, "debe transformarse en una tesis mucho más difícil, a saber, que *ninguna* forma de exterioridad que haga posible la experiencia de la diversidad en relación puede ser meramente conceptual" (FG, 181), lo que llevará directamente a Bradley, a pesar de que en Kant, como decía antes, la diversidad esté presente desde el principio.

Pero Russell está convencido de que aceptar la diversidad del espacio es aceptar el espacio mismo como base (unitaria) de la metageometría. Indudablemente Kant pareció exigir demasiado al espacio al presentarlo, no sólo como diverso, sino también como único y preparado para ser aprehendido por las categorías a través de una mera esquematización (p. ej. B 39). Sin embargo, Kant añadió que esa unicidad procede de su carácter de intuición pura;³⁴ como concepto, el espacio surge del proceso de limitación de esa intuición, recibiendo, así, la multiplicidad. Por eso los axiomas geométricos no derivan, para Kant, de conceptos (son sintéticos, no analíticos), ni pueden configurar un concepto aún más amplio (que carecería de la intuición correspondiente). El problema es que Russell no puede aceptar la división kantiana de los juicios (Bradley lo prohíbe), por lo que trata de sustituirla a través de Grassmann y Riemann topando una y otra vez con el muro de la forma de exterioridad, que ha de ser, al mismo tiempo, concepto e intuición. En cambio, para Kant ningún análisis de conceptos puede suplir a la intuición (única que, en geometría, proporciona certeza apodíctica). Por eso tampoco Hilbert cabe dentro de Kant, a pesar de sus coqueteos con la intuición. Lo trágico de FG es que Russell también tenía cerrada la salida axiomática y aún no disponía de teoría alguna de la construcción.

Por tanto, no es la falta de "diversidad" lo que exige una modificación de la Estética,³⁵ sino la necesidad de obtenerla conceptualmente al principio y pasar después, mediante una transición que asuma lo común a toda geometría, al espacio real. Es muy posible que Russell se inspirase en un concepto de

³⁴ Aquí quiero subrayar sólo la importancia de la intuición como fundamento de lo apriorístico de la geometría en Kant, que parte de la *unicidad* del espacio, aunque de ninguna manera negar el papel del entendimiento en la *unidad de la síntesis* que, de lo vario de la percepción, *posibilitan* las categorías. Esto último queda subrayado especialmente, como me comenta Roberto Torretti, en la nota de Kant a B 160, donde se aclara el correspondiente pasaje de la Estética. Véanse también mis notas 27 y 35

³⁵ Las pruebas de que para Kant el espacio contiene ya la diversidad y la pre-unidad son numerosas: "Espacio y tiempo contienen lo diverso de la intuición *a priori*" (B 102); el espacio "se limita a suministrar a un conocimiento posible lo vario de la intuición *a priori*" (B 138); véase también B 161.

Stallo (1882) muy similar al de forma de exterioridad, del mismo modo en que se inspiró también en sus críticas a Riemann. Las coincidencias son, como vamos a ver, asombrosas.

Parte Stallo (1882, cap. XIII) de una protesta contra la disputa, entonces novedosa, entre los kantianos y los "pangeómetras". Para él, ambos hacen del espacio una realidad en sí, bien como sensación (Riemann, Helmholtz), bien como intuición (los kantianos). Los primeros se equivocan al atribuir a los cuerpos una existencia independiente del espacio (y también en la creencia de que las propiedades de éste son determinables empíricamente). Los segundos al creer que podemos "vaciar" el espacio (que se halla asociado siempre a alguna sensación) hasta verlo como algo subjetivo. La propuesta de Stallo es que el espacio es un *concepto*, resultado de la abstracción. Pero su noción de abstracción se acerca mucho a la de construcción y, sobre todo, se acerca a la *forma de exterioridad* russelliana.

Existen dos líneas diferentes de abstracción para Stallo. Según la primera de ellas, partimos de las sensaciones y llegamos a la extensión, atributo común a todos los objetos sensibles: "cuando hemos abstraído sucesivamente esas diversas sensaciones llegamos finalmente al abstracto o concepto de una forma de extensión espacial. Digo a propósito *forma de extensión* y no simplemente *extensión* o *espacio* pues lo primero, y no lo segundo, es el *summum genus* de la línea de abstracción aquí indicada" (1882, 235). Hasta aquí las semejanzas con Russell son: el incluir toda percepción; la abstracción en sí misma y el presentar el espacio como caso particular. La diferencia básica es, naturalmente, el énfasis empirista. Pero el empirismo de Stallo es *sui generis* pues ofrece una tercera vía (como Russell) entre los pangeómetras y los kantianos (p. 228) y acusa a los empiristas clásicos (Stuart Mill) de negar el origen *conceptual* de la matemática. La divergencia con Kant es que hace del espacio un concepto, aunque, por idénticos motivos que Russell, duda en considerar a esa *forma de extensión* sólo un concepto. Si así fuera, se olvidaría que esa forma es el último resultado del proceso por el cual puede concebirse un objeto o fenómeno (pp. 235-6). Es decir: la forma de extensión es un *resultado*, pero (como en Russell) también *hace posible* la experiencia en toda su diversidad.

La segunda línea de abstracción conduce al concepto general de *espacio*, a través del cual podremos después considerar otras posibilidades (otros "espacios"): "un concepto formado separando (*by dismissing*) de nuestra representación mental de los objetos físicos, no sólo todos los atributos que constituyen sus propiedades físicas distintas de la extensión, sino también todas las determinaciones de figura mediante las cuales son distinguidos" (1882, 240). Por eso precisamente la *forma de extensión* es el género supremo sólo a la hora de *separar* esa extensión de las cualidades que habi-

tualmente se le asocian, mientras que cuando se trata de abstraer también las formas mismas, llegamos al auténtico género supremo: el espacio. El no ver la diferencia es lo que hace que los pangeómetras hablen de varios "espacios" (*ibid.*, 236).

Se ve pues claro que el intento básico de Stallo es el de salvar a Kant de las geometrías no euclidianas, aunque sus ideas machianas le lleven a preferir una visión del espacio como concepto formado (construido) en nosotros más bien que innato. En todo caso, el nexa con la *forma de exterioridad* de Russell sigue en pie, en tanto que la *forma de extensión* de Stallo también trata de dar cuenta de la variedad de los fenómenos en cuanto extensos y, no obstante, constituye a la vez algo previo a la experiencia y algo conceptual. Así, ambos están a medio camino de Kant y de la metageometría por el mismo motivo: para ambos el carácter subjetivo del espacio no hace tambalear la geometría porque, tanto si el espacio es interno como si es externo, la cuestión de su *forma* es la característica fundamental que aúna el carácter físico y mental de su construcción (1882, 236-7). Igualmente, sus respectivas "formas" rechazan el aspecto cuantitativo de Riemann y ofrecen la posibilidad de distinguir la variedad de los objetos. La de Russell por medio de la misma exterioridad (que se apoya en la diferenciación); la de Stallo por no haber abstraído aún las figuras (lo cual se lleva a cabo en la *segunda* línea de abstracción).³⁶

En cuanto a la influencia directa de Hegel, parece limitarse (en el concepto que comentamos) a dos puntos: la noción de "alteridad" (que Russell usó para delimitar su *forma de exterioridad*) y la expresión misma "forma de exterioridad" (que Russell adoptó como parte de su ropaje hegeliano, de manera parecida a lo sucedido con su noción de magnitud; véase mi 1987a, 98 ss.). Sobre el primer punto dice Russell que ser exterior a algo es ser otro en relación a ese algo (FG, 136), y que la forma de exterioridad ha de significar, en consecuencia, el hecho³⁶ de ser diferente (*the fact of Otherness*): "Una Alteridad de sustancia, más bien que de atributo, se pretende aquí; una Alteridad que pueda quizá ser llamada real como opuesta a la diversidad lógica" (FG, 62). Sin duda, con ello quiso remarcar Russell la idea general hegeliana de que, cuando aparece el espacio en el juego de transiciones (al llegar a la Naturaleza), la Idea sale de sí y se hace otra "exterior" a ella misma. Por eso —llegamos ahora al segundo punto— cita (FG, 138) la *Enciclopedia* en un punto (§254) donde se explica la idea de espacio a través de la "exterioridad" (*Äußerlichkeit*). La idea básica de Hegel aquí es definir el espacio: "la primera o inmediata determinación de la Naturaleza es la universalidad abstracta de su exterioridad, cuya indiferencia privada de mediación es el espacio", por lo

³⁶ También esa *form of extension* es un extraño híbrido entre Kant y el empirismo, que le sirve a Stallo para poder dar cuenta de otros espacios. Véase Kant, B 35.

que el espacio es el ser fuera de sí mismo. Admite Hegel que la concepción kantiana es aceptable (si se prescinde de lo subjetivo), al hacer del espacio una mera forma, "la de la exterioridad inmediata", con lo que se refiere Hegel a la posterior transición hacia la exterioridad "aislada" (mecánica finita, materia y movimiento) y la mecánica absoluta o movimiento libre. Por último, coincide también con la idea de cantidad de Russell (como lo más abstracto y sin determinaciones) que, aplicada al espacio, lo muestra como "primera forma de la exterioridad" (*erste Form des Außereinander*). En la sección siguiente veremos que también la introducción de la *materia* procede de Hegel.

Llego ahora a la última fuente: Bradley. En ella se refunden (al final de la obra) todas las ideas que hemos ido rastreando hasta aquí. Ello sucede en dos pasos básicos: primero, *encarnando* la idea de forma de exterioridad en la experiencia; segundo, haciendo lo mismo en la *materia*. La conexión con la experiencia a través de Bradley es muy forzada. Brevemente, viene a decir que, aceptando la idea de que el conocimiento comienza en la percepción más simple (el *this*) y se infiere a partir de ella, esa percepción elemental debe ser ya compleja. Por ello, su análisis debe revelar adjetivos que permitan una referencia más allá de sí misma. Lo cual puede ocurrir sólo a través de una forma de exterioridad que extienda la validez de los axiomas a priori a todo mundo inteligible (FG, 186). Pero el único concepto mediador que se utiliza es el de la "identidad en la diferencia", el cual, al hacer complejo el objeto del conocimiento (es decir, no un mero particular), exige que también el mundo mismo posea esa complejidad. La conclusión es una especie de coincidencia sujeto-objeto, muy típica de la tradición hegeliana, con unas gotas de psicologismo y una estructura kantiana:³⁷ "perteneciendo a la constitución de la *mente*, la experiencia será imposible a menos que el *mundo* admita ciertos adjetivos" (FG, 179).

La forma de exterioridad puede (visto todo lo anterior) considerarse una construcción sólo a título de digno precedente de las que estaban por venir. Tiene algunos de los rasgos característicos, como el de cumplir las funciones de aquello que origina su elaboración (el espacio), llegando incluso a bordear la eliminación de la entidad "construida". O el de ofrecer una estructura fundamentalmente lógica, a pesar de que Russell no dominaba aún (si ello es posible) la distinción entre lo *formal* y lo no formal. Incluso parece subyacer en ella la idea de "modelo abstracto" que llega a verse "interpretado" al pasar a la experiencia, sobre todo cuando se esfuerza en identificarla con los axiomas que la definen. Podemos, pues, otorgarle un cierto valor constructivo, sin ol-

³⁷ Spadoni (1977, 127 ss.) describe esto muy acertadamente: "In order for experience to be unified, space and time must be forms of externality. Bradley's idealism was advocated within the framework of a Kantian epistemology".

vidar, claro es, su aire general de mera postulación, o los trucos de la sinonimia que afectan a sus transformaciones. En todo caso parece tener un valor superior al que la da Torretti (1978, 306) cuando describe este concepto como mero mecanismo que, aprovechando su "aura de significado", pretende cumplir funciones que en realidad no podría si lo limitásemos a su contenido conceptual efectivamente definido, como se demuestra, según Torretti, sustituyendo la expresión por un término carente de sentido. Al menos si admitimos que en una de las cuatro líneas de aproximación al concepto (véase más arriba), Russell parece entenderlo como definido "implícitamente" por un conjunto de axiomas, que era lo que el primer Hilbert proclamaba para los primitivos de sus *Grundlagen*.

6. La materia

La misma idea de postulación que, como hemos visto, era una de las latentes en la introducción del concepto de forma de exterioridad, se hace mucho más explícita cuando, en el último capítulo de FG, aparece el concepto de "materia abstracta" (más geométrica que física), destinado a superar las contradicciones surgidas a lo largo de la obra. Sin embargo, también este segundo concepto podría interpretarse como una "construcción", al exhibir algunas de sus características típicas. Se trata además de un concepto introducido por vez primera en FG ya que, aunque las contradicciones son detectadas también en los artículos previos, sólo se insinúa la posibilidad de superarlas a un nivel "superior". Así, en 1896a. se avanza la necesidad de abandonar el punto de vista puramente geométrico sobre bases metafísicas (p. 23), y en 1896c se añade incluso una referencia (sin desarrollar) a la "noción de materia" (p. 112), aunque anunciando que con su introducción se ocasionarán nuevos problemas.

Ya en FG, Russell introduce el concepto por primera vez en conexión con su crítica general a Helmholtz (pp. 78-80); y, más concretamente, cuando comenta la necesidad de distinguir entre la materia de la dinámica (afectada por el movimiento y la fuerza) y la de la geometría (que sólo requiere axiomas espaciales). De esta forma, admitiendo la segunda como presupuesta por la primera, se deshace del argumento antikantiano de Helmholtz según el cual los axiomas de la geometría son empíricos (y se desarrollan en nosotros por el hábito de tratar con cuerpos rígidos). Es en este punto donde Russell introduce su *segundo tipo de a priori*, destinado a defender a Kant sin necesidad de caer en su a priori subjetivo. Con la misma jugada logra neutralizar lo que de valioso pudiese tener el argumento de Helmholtz concediendo, no la dependencia de la geometría con respecto a la mecánica, pero sí con respecto a la presuposición de una "materia abstracta" (no

empírica) que sirva para "encarnar" la forma de exterioridad y sus axiomas. Así, la forma de exterioridad supera también el peligro de la "mera construcción intelectual" presente ya en la geometría proyectiva (que es "puramente hipotética"; FG, 135). Una vez más, la servidumbre de Bradley le sirve para escapar a Kant y también al empirismo. Sólo con el "paso a la materia" (auténtica transición hegeliana) se logran tanto la "realidad" de los axiomas como el carácter intuitivo requerido por la forma de exterioridad (si quiere dar cuenta de lo efectivamente espacial).³⁸

También de la mano de Bradley (con Hegel, y parcialmente con Kant y su continuidad "fluyente") Russell rechaza los atributos espaciales de continuidad, divisibilidad y relatividad, sobre la base de su reducción a tres contradicciones principales. De acuerdo con la primera de ellas (la antinomia del punto, pp, 189-92), la mente parte de la infinita divisibilidad requerida por la medida y presupone que aquélla ha de conducir a la admisión de partes indivisibles. Pero en el espacio esto no se cumple: sus puntos presentan la contradicción de que, siendo espaciales (forman parte de relaciones que lo son), no contienen espacio. Así, de la mera relatividad la mente pasa a lo absoluto más contradictorio. Russell quiere solucionar el problema admitiendo una materia abstracta que proporcione, no partes, pero sí auténticos átomos inextensos que sirvan de términos a las relaciones que componen el espacio.

Torretti (1978, 304) denuncia la arbitrariedad de la contradicción, basada en la mera presuposición de que la división infinita tendría un resultado, al que Russell llama *punto* (el cero de la extensión). Sin embargo, continúa Torretti, si, como establecía el axioma I, todas las partes del espacio son cualitativamente similares, lo obtenido en cada paso de la división infinita seguiría siendo similar, es decir también divisible, pero nunca el cero de la extensión. Así, el llamar punto a tal entidad inexistente es un disparate, por lo que, si ha de hallarse algún sentido a los axiomas, habría que ignorar tal definición (que se utiliza en el axioma III) e introducir el término "punto" como primitivo. Con ello Torretti ilumina el problema técnico, pero a mi juicio no aborda el "momento" filosófico en que se halla Russell, que se está enfrentando aquí claramente al lenguaje ordinario y sus "contradicciones". Como aún no puede aceptar el juego de lo primitivo y lo derivado, al carecer de los instrumentos técnicos relevantes, "construye" una noción de materia que resuelve el problema a un nivel "superior", al superar (*aufheben*) la

³⁸ Este texto sustenta nuestra interpretación: "If we construct a mere conception of externality, and thus abandon our actually given space, the result of our construction, until we return to something actually given, remains without existential import —if there *be* experienced externality, it asserts, then there must be a form of externality with such and such properties" (FG, 135).

contradicción al esitlo hegeliano y "salvar" también a Kant (en la medida en que necesita su noción de a priori para que los axiomas no sean empíricos).

Exactamente lo mismo sucede con la segunda contradicción (FG, 192-3). En ella vemos cómo las rectas sólo pueden definirse mediante puntos y éstos mediante aquéllas. Introduciendo la materia, cree Russell, los puntos son sustituidos por átomos materiales, con lo que *la dualidad desaparece* al hacerlo las "unidades" utilizadas para definir. Se trata, según Russell, de una auténtica *contradicción lógica*, de carácter *necesariamente circular*, que nos obliga a rebasar el marco de la lógica geométrica y nos conduce hasta algo más concreto y subsistente que el espacio geométrico (1896a, 21). Con ello podemos comprobar de nuevo que Russell sólo ve en la interdefinibilidad el aspecto superficial (de sentido común) del círculo posible, participando así de la costumbre bradleyana (ej. relaciones y cualidades), y mostrando que aún no disponía de la técnica pluralista de la definición (que busca indefinibles) ni tampoco de nada parecido a la definición implícita.

Dejando la tercera contradicción para la próxima sección, paso ahora a mostrar los antecedentes hegelianos de la noción de *materia*. Para Hegel no es legítimo hablar de puntos espaciales; el espacio es sólo posibilidad de exterioridad y, por su continuidad, le es aplicable la categoría abstracta de cantidad, como opuesta a la magnitud (*Encic.*, §254). Pero tanto el espacio como el tiempo y la materia pueden ser considerados, arbitraria y convencionalmente, también como magnitudes, tanto continuas como discretas (que no son más que especies de un mismo modo). Por tanto, "la antinomia del espacio, del tiempo o de la materia, respecto de ser divisibilidad hasta el infinito, y a su consistir en indivisibles, no es otra cosa que la afirmación de la cantidad, una vez como continua y otra como discreta", por ello resultan divisibles o indivisibles según se vean: "un modo de pensar es tan unilateral como el otro" (*Encic.*, §100). Tales antinomias, según Hegel, se superan sólo mediante el tránsito a un nivel superior. El espacio y el tiempo interactúan para producir el movimiento, el cual, como devenir, genera, por mediación de su contrario, la unidad, es decir la materia, que supone y realiza el paso de la idealidad a la realidad y da lugar, después, a la mecánica y la física (*ibid.*, §§261-2). Aunque Russell no mencione para nada a Hegel en este punto, su recorrido es similar, adaptando su forma particular de materia a las necesidades concretas de FG.³⁹

A quien sí menciona es a Hannequin (1895), cuyo planteamiento general es precisamente el de ir superando las contradicciones mediante la postula-

³⁹ Sobre el hegelianismo de FG véase también el reciente Griffin 1988, interesante a pesar de juzgar algo a la ligera la deuda russelliana con Kant (he explicado este punto en mi 1989a). El artículo de Griffin constituye un primer adelanto de su obra *Russell's Idealist Apprenticeship*, próxima a publicarse en Oxford University Press.

ción de conceptos. En concreto, Hannequin reduce sucesivamente la geometría, la mecánica y la naturaleza toda a tres contradicciones, que son después superadas introduciendo los "átomos" como conceptos "regulativos" destinados a solucionar la oposición entre lo continuo y lo discreto. En geometría, Hannequin ataca la posibilidad de prescindir de la recta euclidiana (contra la metageometría) y lo contradictorio de cualquier definición del continuo o el infinito (contra Cantor). Aquí, la introducción de los átomos es necesaria para resolver tales problemas (aunque genere otros). En mecánica se llega, a través de diversas transiciones (espacio, tiempo, movimiento, dinámica, inercia, fuerza, aceleración, masa y volumen), a los átomos, que son unidades últimas, iguales, indivisibles e impenetrables. Pero las diversas teorías sobre la materia se contradicen, de forma que el átomo aparece como un producto de la lucha entre la cantidad y la magnitud. En ambos casos el átomo es algo no real, a menos que admitamos que lo real es contradictorio. Por último, también en la naturaleza la introducción del átomo resuelve contradicciones (en concreto la referente a las regresiones múltiples de masas y moléculas). En general, el atomismo es el producto de un doble movimiento de análisis y síntesis que, por lejos que se lleve, no alcanza nunca un elemento común a todas las síntesis: lo que confirma el carácter no real de los átomos, que no son más que elementos de *nuestras* construcciones (1895, 225 ss.), destinados a llevar siempre la marca de la contradicción en su seno a pesar de conciliar las referidas oposiciones. Al confundir lo indivisible con el individuo, llegamos a la contradicción suprema, pero contribuimos al progreso de la ciencia (pues sólo hay ciencia de la magnitud y la medida). Así, interpretando el átomo como idea abstracta y regulativa, desaparecen las contradicciones surgidas al otorgarle cualidades reales; y dotándolo sólo de un mínimo de extensión y atributos dinámicos, podemos considerarlo como una apariencia bien fundada (*ibid.*, 413).

Russell necesitó modificar sólo un pequeño detalle de este planteamiento: eliminar el menor rastro de extensión en los átomos propuestos por Hannequin. (De esta forma le quedaba sólo un enemigo: Cantor, al cual se dedicaría más adelante). La referencia a Hannequin parece estar implícita cuando Russell admite que la introducción de la materia genera, a su vez, nuevas contradicciones, como muestran los problemas del atomismo, que exigen toda una crítica de la física (1896c, 112). Al eliminar el mínimo de extensión, admitido por Hannequin, Russell pretende evitar al máximo tales contradicciones a través de la teoría de los centros inextensos de fuerza de Boscovitch. Por eso escribió, en su recensión al libro de Hannequin, que si admitimos que una masa finita puede carecer de extensión y "puede no tener más atributos espaciales que aquellas relaciones externas que constituyen la localización - entonces las dificultades de considerar la masa como total-

mente discreta desaparecen y queda superada la dificultad particular del atomismo" (1896d, 417). La elaboración de esa idea es precisamente su concepto de materia de FG. Sin embargo, Russell no reconoce la deuda (como otras veces en esta época), a pesar de citar a Hannequin por otros motivos.⁴⁰

Resta sólo valorar la *materia* como construcción. Según Russell, sus propiedades y funciones deben ser (FG, 192): aportar los términos para las relaciones espaciales; hallarse diferenciada en átomos simples; carecer de figura espacial (por no contener relaciones internas) y permitir la relación entre sus átomos. A la vista de ello ha de concluirse que se trata de un claro ejemplo de *postulación* más que de construcción (como los números ideales de Kronecker o los *êtres de raison* de Poncelet). Le falta un elemento esencial: apoyarse en elementos (no sólo en relaciones) que constituyan su garantía ontológica. (Aunque es cierto que la diferencia entre elementos y relaciones se hace borrosa al admitir "técnicas" como la definición implícita). De hecho Russell no llega aquí a distinguir entre diversas formas de introducir conceptos. Carece todavía de una teoría de la definición y una visión clara de las relaciones (como veremos más abajo). Nuestra conclusión es, pues, similar a la de la sección anterior, aunque más negativa.

7. Las relaciones y el método

La teoría de las relaciones de Russell en FG es todavía la procedente de Bradley, por lo que tiende a interpretarlas como adjetivos de lo relacionado. Comienza, con ello, toda una interpretación de su maestro (que se mantendría después de la ruptura) que no le hace en absoluto justicia; para Bradley tan equívoco es hablar de relaciones externas como internas (véase mi 1990e). Lo importante, sin embargo, es que la interpretación que escoge Russell es la que más favorecía una visión monista del mundo, en la que se hacía mucho más difícil admitir términos independientes (o simples) y, por consiguiente, construir una teoría adecuada del orden (que llegó con Cantor).

A partir de esta visión de las relaciones, llama a los axiomas "adjetivos del espacio" (FG, 65) o adjetivos espaciales de la materia (FG, 79), y a las relaciones que un elemento pueda establecer, las llama, en general, "adjetivos" (FG, 131). También en virtud de esa visión considera que todo razonamiento geométrico es siempre circular, al estar basado en la posibilidad de la interdefinibilidad. Como se ve cuando insiste una y otra vez en que al definir una recta mediante dos puntos, la recta "puede ser considerada como una rela-

⁴⁰ Lo cita sólo dos veces: una para comentar las ventajas "regulativas" de la aplicación del número a las ciencias (FG, 177); la otra para resaltar que la hipótesis del espacio comienza con el cálculo infinitesimal (*ibid.*, 189).

ción de los dos puntos o un adjetivo del sistema formado por ambos en conjunción" (FG, 120).

Por eso cuando se ve obligado, en la búsqueda de una forma de exterioridad meramente "intelectual", a construirla mediante relaciones, se encuentra de inmediato con el problema de la compatibilidad entre esta concepción y los diversos axiomas. Así por ejemplo, cuando considera la necesidad de la divisibilidad infinita se ve abocado a hablar de sumar o restar relaciones, lo cual, a falta todavía de una lógica operativa de las relaciones, le suena extraordinariamente raro y le conduce a ver la forma de exterioridad, no ya como una relación, sino como "la mera posibilidad de una relación" (FG, 138) (a la espera de introducir la *materia* que se constituya como sujeto de tales relaciones). En cambio, a la hora de fijar las dimensiones que constituyan esa forma de exterioridad, les concede (como relaciones) un estatus ontológico mucho más firme y definido. Hasta el punto de hacerlas *independientes* de otras relaciones, con el argumento de que, si dos relaciones son mutuamente externas, deben tener entre ellas la relación de exterioridad, la cual, por su homogeneidad, no puede impedir que esas dos cosas mantengan su relación cuando alteran las que mantienen con otras cosas.

La conclusión es que la relación de exterioridad es independiente de las otras dos cosas. Así, las relaciones no son una mera inferencia a partir de los términos relacionados, los cuales, como tales, no pertenecen a aquella forma de exterioridad (FG, 143-4). Sin embargo, en el momento en que esto se concede, añade Russell, se ve la circularidad del razonamiento: todo ello equivale a la relatividad de la posición, por lo que hay que admitir que las posiciones (las "cosas") existen sólo en virtud de sus relaciones. Y entonces surge la pregunta: "¿Relaciones, con respecto a qué?", calificada por Russell de "cuestión que envuelve muchas dificultades", y que (a la espera de introducir la *materia*) se resuelve reconociendo: "De momento, a pesar del notorio círculo cometido, tomaré las relaciones como relaciones con respecto a otras posiciones" (FG, 161 n.). (Tales problemas sólo se resolverían con la introducción de la teoría absoluta de la posición y las relaciones externas correspondientes; véanse mis 1988a, c, d, y 1991)

Toda esta problemática confluye (junto con la tercera de las antinomias que dejamos pendiente en la sección anterior) en los últimos epígrafes de FG, donde se introduce la identificación del espacio con el *orden espacial*, que es distinto, según Russell, del espacio vacío, el cual, como forma de exterioridad, es sólo la posibilidad de establecer relaciones.⁴¹ Mientras, que al dotar a esas relaciones de "existential import", aparece el auténtico *orden*

⁴¹ Russell califica aquí al término "relación", al estilo bradleyano más puro, de "ambiguous and dangerous" (FG, 193).

espacial, que estará constituido, no por las meras relaciones *vacías*, sino por las relaciones *reales* entre los términos materiales postulados: los átomos inextensos (FG, 193). Este paso se parece mucho, en términos intuitivos, a la idea de "interpretación", la cual, aunque ya introducida por Boole y usada por Whitehead (en su 1898), no era todavía bien distinguida por Russell de la idea de "aplicación" (en su sentido ordinario, no en el matemático), según la cual un conjunto de relaciones, aplicado a la realidad, toma cuerpo en ella y se "encarna" obteniendo así "términos" que fundamentan esas relaciones.

Con esta nueva visión Russell reafirma su rechazo al espacio meramente intuitivo de Kant y defiende su carácter *conceptual* como espacio vacío, hasta presentar el orden espacial como carente de contenido: "el espacio vacío puede, sin embargo, ser una concepción universal; puede relacionarse con el orden espacial como el estado con sus ciudadanos" (FG, 195). De esta forma, al considerar el espacio vacío sólo como orden espacial, desaparecen las contradicciones (los átomos inextensos no pueden dividirse, con lo que desaparecen las antinomias de la divisibilidad infinita) y el espacio vacío como concepto (vacío) encuentra su correlato en el orden espacial como algo inmediatamente experimentado (con lo que la forma de exterioridad se encarna). Sólo así se alcanzan, según Russell, las relaciones *reales* (FG, 199).

Toda esta concepción resulta en extremo interesante pues con ella, al darse primacía al orden (aunque sea como opuesto a las "meras" relaciones) Russell está constituyendo un precedente que facilitará su posterior aceptación de la idea lógica de orden, fundamental en su etapa de progresiva aceptación de Cantor (véanse mis 1988a y 1991, cap. 2). En todo caso algo parece claro: no podía construir una teoría adecuada de las relaciones sin la noción de orden (y viceversa). Problema que, a su vez, se relaciona con el de la definición implícita: si un conjunto de relaciones sirven para construir (o definir) un concepto (aquí el de orden espacial), se está primando una visión según la cual los conceptos pueden ser definidos *a través de las relaciones en las que se encuentran sus elementos* (o a través de las relaciones que ellos mismos mantienen con otros conceptos). Ya nos hemos referido a la forma en que Russell coquetea con esta concepción a la hora de considerar que el espacio y la forma de exterioridad pueden considerarse como *definidos por los axiomas* que se cumplen en ellos. El mejor ejemplo de ello es éste: "Las líneas rectas resultan completamente definidas sólo cuando añadimos a la definición formal los axiomas de las rectas y de las paralelas" (FG, 96). Sólo haría falta eliminar la primera parte de la descripción y tendríamos a Hilbert. Ahora podemos pasar al método en sí mismo.

El punto de partida metodológico en esta obra es el "análisis" bradleyano e, implícitamente, la teoría kantiana de la construcción. De acuerdo con el primero, la mayoría de nuestros conceptos filosóficos son "construcciones

intelectuales", es decir, meras abstracciones (véase mi 1987j). Y, aunque algunas pueden estar mejor fundamentadas que otras (por apoyarse más directamente en la percepción inmediata), en última instancia todas fallan si pretenden rebasar el marco de lo meramente "presupuesto" en tal o cual rama de nuestro saber. En cambio, para Kant las construcciones sólo son posibles en matemáticas y geometría: sólo éstas pueden crear conceptos, aunque siempre partiendo de *intuiciones*. La filosofía no puede hacerlo al verse obligada a usar *conceptos* (es decir, el aparato discursivo), por lo que puede ofrecer sólo definiciones que no sean constructivas, es decir, meras explicaciones que, en última instancia, no pueden rebasar la aplicación de conceptos a fenómenos (o bien el análisis de los conceptos mismos). Russell no parece estar al corriente de esta concepción kantiana (que se halla situada, algo incómodamente, al final de la *Crítica*: en B 741 ss.). Sin embargo, se da cuenta de que es necesario el elemento intuitivo en toda construcción abstracta, lo que le llevó a dotar de "materia" a lo que era, en el fondo, una construcción meramente estructural (la forma de exterioridad), dándole, así, no sólo valor ontológico, sino también epistemológico.

Sin embargo Russell no logra, con ello, elaborar una mínima teoría de la definición constructiva, aunque es cierto que sus posteriores esfuerzos en este sentido pueden interpretarse como un intento de escapar al dualismo entre apriorismo y empirismo que late en FG. Así podría verse su introducción de la *materia* hecha de átomos sin extensión, dentro del más puro "apriorismo empirista" (similar al de Erdmann). Al mismo tiempo, podría considerarse que la forma de exterioridad es "interpretada" mediante la *materia*, por lo que aquélla sería la estructura lógica (el presupuesto) de ésta. En el fondo, todo ello hubiera sido posible incluso dentro de Kant mismo, pues para él la intuición es también constructiva, y las entidades y relaciones que maneja no son meros datos adquiridos de forma pasiva, sino que la subjetividad, que es la fuente última de validez en Kant, posee también su propia creatividad (Bonfantini 1970, 373), al igual que la espontaneidad del conocimiento. Pero Russell necesitaba también algo que Kant no podía ofrecer: que sus axiomas fuesen completamente a priori y, no obstante, sin ningún elemento sintético. Sólo así podrían éstos dar cuenta de las geometrías no euclidianas y, además, aplicarse al espacio intuitivamente dado.

A través de Hannequin (de quien, como vimos tomó varias cosas, entre ellas la idea de introducir átomos para resolver las contradicciones) podía haber aprendido a considerar que los conceptos que se construyen a través de definiciones no han de considerarse como reales, sino, más exactamente, como meros recursos que, por sus propiedades, han de valorarse en función de su fecundidad. Así, cuanto Hannequin "justifica" la introducción de los átomos, deja claro su estatus como mero concepto que, al igual que la línea

recta o el infinito en matemáticas, es el objeto de una definición, por lo que posee ya el derecho a entrar en la ciencia a través de su capacidad para deducir de él un buen número de propiedades (1895, 17). Pero Russell no podía aún aceptar que existan conceptos salidos de una mera definición (es decir, parcialmente contruidos) que aporten sólo fecundidad. Como hemos visto en sus críticas a las construcciones geométricas (sección 3), similares a las que dirige contra Cantor (véanse mis 1988a y 1991, cap. 2), en tales casos recurre a su distinción entre lo técnico y lo filosófico, creyéndose obligado a justificar filosóficamente toda entidad antes de introducirla técnicamente.

Russell habla sistemáticamente mal de las construcciones en esta época, dejándose llevar tanto por el matiz típico con que lo hacía Bradley como por el lenguaje kantiano (cuando se trataba de supuestas construcciones en filosofía). Y ello incluso antes de FG, como puede comprobarse en su 1895a, donde, por ejemplo, describe el principio de Hamilton (la reducción de la causación a la imposibilidad de creación/destrucción de la materia) como algo "regulativo" y no constructivo, sobre la base de que presupone la abstracción del movimiento en relación a la materia moviente, lo que supone su aplicación, no a lo real, "sino a una construcción intelectual y abstracta de lo real, que descansa en la distinción de sustancia y atributo" (1895a, 249). Así, aparte de esforzarse en coordinar a Bradley y a Kant, ofrece otro ejemplo de que el sentido que tiene para él esa conjunción es, sobre todo, la lucha contra el empirismo⁴² y contra el "subjetivismo".

Para esta última tarea Hegel era, sin duda, un buen aliado. El hecho de que en Hegel el modelo abstracto venga a coincidir después, milagrosamente, con la realidad (por no ser, en el fondo, más que realidad), refuerza el interés que Russell podía ver en este tipo de construcciones. Ya en FG predomina, sin embargo, la descalificación de toda construcción, que tiene lugar sistemáticamente.⁴³ El fondo de toda esta oposición parece radicar en su rechazo de los particulares (también herencia de Bradley), partiendo de la base de que ellos habrían de aportar el material de toda construcción. Por eso necesitó deshacerse del monismo antes de aceptar la teoría de la definición de Moore, o cualquier otra teoría de la construcción a base de elementos (véase mi 1990d). En la sección 3 pudimos ver ya cómo se oponía, sobre la base de tal rechazo, a los intentos de Riemann y Helmholtz de considerar el espacio en forma *serial* (en la tradición analítica de Descartes), cuando, para él, toda

⁴² En la recensión citada (1895a) da la razón a Heymans contra "Mach and others, who maintain a more empirical position" (p. 249), posición que cambió radicalmente en 1914.

⁴³ Siendo tachadas de "meras construcciones matemáticas", o de construcciones "puramente conceptuales" (o "intelectuales"), como sucede en muchos otros lugares de FG (pp. 27, 105, 135, 189 y 147).

construcción en base a puntos implica todo un conjunto de contradicciones que no pueden ser resueltas más que a un nivel superior (FG, 64). Por ello, todas las construcciones fallan por su base: están realizadas con elementos "falsos" que, generalmente, tienden a construir lo que por su esencia es incompatible con toda reducción. De nuevo Bradley y Kant contra Dedekind y Cantor: "cualquier continuo, creo yo, en el que los elementos no sean datos, sino construcciones intelectuales resultado del análisis, puede mostrarse como teniendo el mismo carácter relacional y no relacional del espacio" (FG, 188). Es decir, la tercera de las contradicciones que veíamos más arriba, superable sólo metafísicamente. Veamos ahora cómo esta problemática se refleja en la distinción entre geometría métrica y proyectiva.

La aceptación russelliiana de la importancia filosófica de la geometría proyectiva, bajo la influencia de Whitehead (como consta en el prefacio de FG), debió ser laboriosa, como puede inferirse de sus opiniones anteriores al respecto, francamente contrarias. Según Russell (1896c, 100 n.) sus axiomas (entonces sólo métricos) serían válidos aunque la magnitud fuese considerada inesencial (de acuerdo con la "projective school"). Y ello por cuatro razones: (i) la medida es requisito para otras ciencias; (ii) la reducción de la geometría métrica a la proyectiva se realiza mediante números imaginarios, por lo que es meramente técnica (y no filosófica); (iii) la geometría proyectiva presupone la localización, que implica la medida, y (iv) los axiomas métricos siguen siendo usados en ella. Ya hemos tenido ocasión de comprobar cómo todos estos argumentos, exceptuando el tercero, siguen vigentes en FG, sin que ello le impida, curiosamente, extender la estructura de la obra, que estaba pensada originariamente sólo para la geometría métrica, a la proyectiva.

Lo más importante es que, aunque Russell *dice* conceder a la distinción sólo una importancia técnica (FG, 9), y así lo mantiene a lo largo de la obra (sobre todo por la falta de intuitividad que presenta esta geometría general),⁴⁴ sin embargo, parece concederle cierta conexión con lo intuitivo en la medida en que considera que la forma de exterioridad se halla implícita en ella desde el principio, con toda su carga de intuición perceptiva. Sólo así puede manejar una concepción lo suficientemente amplia como para superar los "espacios" particulares y, de esa forma, dar cuenta de otras geometrías menos generales. Aquí parece estar presente, por tanto, una idea típica de la fase posterior (influida por Moore): la de que lo primitivo (simple o indefinible) ha de ser conocido intuitivamente. De esa forma, su noción de lo a priori cobra nueva importancia, pues decir que los elementos de la geome-

⁴⁴ Ello de forma paralela a su crítica al uso de los números imaginarios, que sigue fiel (en FG) al argumento de 1896c que hemos descrito. Para Russell, el uso de imaginarios carece de "significado filosófico" al faltarles el apoyo intuitivo (p. 43), por lo que constituyen sólo una "ficción" útil basada en la imaginación (p. 45).

tría proyectiva son las propiedades *comunes* a todos los espacios (e incluso que, en forma de axiomas, están presupuestos en todo razonamiento geométrico) es admitirlos como *una especie de indefinibles a los que todo puede reducirse*. Máxime cuando la tarea de hallarlos ha de realizarse luchando contra los engaños de otras presuposiciones que, como las de carácter métrico, “están tan enraizadas en todos los verdaderos elementos de la geometría, que la tarea de eliminarlas requiere una reconstrucción de todo el edificio geométrico” (FG, 118). Lo cual parece una tarea de auténtico *análisis* (seguido de construcción) cuyo alcance metodológico es reconocido por Russell cuando, comentando las características del *tercer* período de la geometría (véase sección 2), escribe: “Comienza reduciendo todas las llamadas nociones métricas —distancia, ángulo, etc.— a formas proyectivas, y obtiene de esta reducción una unidad metodológica y una simplicidad antes imposibles” (FG, 28). Es lo que a veces llamo “logicismo en ciernes”, que se acentuará en la etapa 1898-1900 y fructificará a partir del contacto con Peano y Cantor.

Esa posibilidad de “reconstruir” todo el edificio de la geometría era la que ya atraía al joven Russell. Así, aunque sin trabajar a fondo la idea de interpretación, hay que considerar que el “paso” de la geometría proyectiva a la métrica cae dentro de tal idea (aunque quizá entendida sólo como mera “aplicación”, como decía más arriba). Pues supone que al abarcar, de una vez, a todos los espacios, entonces “toda proposición simbólica es, de acuerdo con el significado dado a los símbolos, una proposición en cualquier geometría que escojamos” (FG, 9). Esa era la gran tarea que había intentado Grassmann y que, con objetivos más generales que los de la mera geometría, estaba entonces intentando Whitehead: utilizar una estructura que, por pasos, se fuera transformando (y encarnando) en conceptos cada vez más concretos mediante la incorporación de particularidades. No en balde Whitehead 1898 se publicó sólo varios meses después de FG, dándose además la circunstancia de que Russell pudo leer parte de las pruebas de imprenta.⁴⁵ Teniendo en cuenta que la obra de Whitehead estuvo casi dos años en prensa (1898, 573), es fácil reconocer la posibilidad de que a través de esa lectura se concretase la influencia (que podía ya existir de palabra) hacia una concepción interesada en hallar estructuras cada vez más generales y abstractas. Russell necesitó aún, para poder apreciar en lo que valía la obra de Whitehead, liberarse de Hegel y Kant, abandonar temas con sabor tan “metafísico” (Bonfantini 1970, 419) y convertir su logicismo en ciernes en una auténtica reconstrucción, no ya de la geometría, sino de toda la matemática.

⁴⁵ Como agradece el propio Whitehead en su prefacio, refiriéndose sobre todo a “las partes conectadas con la geometría no euclidiana” (véase mi 1987a, cap. 7).

Pero FG, como intento metodológico, resultó abortado precisamente por el enorme lastre que suponían sus mismos impulsores (Bradley y Kant). Por concretar tan nefasta influencia podemos destacar tres causas del fracaso: (i) la necesidad de presentar los razonamientos (las transiciones) en forma circular; (ii) el no valorar suficientemente la distinción entre lógica y epistemología, y (iii) el no admitir, más que en teoría, la posibilidad de una auténtica ciencia formal, capaz de constituir estructuras abstractas que fueran independientes de lo intuitivo-epistemológico. Ni siquiera en POM logrará Russell librarse de tales pesos muertos, como lo prueba el mantenimiento de la distinción entre lo técnico y lo filosófico, aunque es innegable que la lógica de Peano situó todos estos problemas a un nivel mucho más operativo.

Terminaré la sección refiriéndome, precisamente, a esa distinción entre matemáticas y filosofía, que de hecho ha ido saliendo aquí y allá. El rechazo filosófico de las construcciones geométricas (sección 3) es un ejemplo que nos permitió constatar su carácter esencialista. Sin embargo, junto a ese carácter indiscutible, asoma la paradoja. Pues, aunque sólo las matemáticas aporten (para Russell) un "suelo firme" (FG, 177) y la filosofía se caracterice por la especulación (p. 92), no obstante, en la medida en que las matemáticas incorporan la cantidad, coartan toda posibilidad de penetrar en la realidad. Como escribió en su crítica a la noción de multiplicidad: "Para las matemáticas, donde la cantidad reina suprema, la concepción de Riemann ha probado ser sumamente útil; para la filosofía, por el contrario, donde la cantidad aparece más bien como un manto para ocultar las cualidades que ella abstrae, la concepción me parece más generadora de error y confusión que de sólida doctrina" (FG, 69). De ahí la actitud, también paradójica, de Russell ante la geometría proyectiva, la cual, aunque lógicamente previa (y por ello más importante filosóficamente), al no poder basarse en el "suelo firme" de la cantidad, incorpora a la geometría métrica solamente de manera ficticia, sin que la reducción rebase el marco de lo meramente "técnico", carente de apoyo intuitivo (FG, 46).

Tenemos, así, dos criterios diferentes del valor de una concepción. Según el primero de ellos Russell valora lo previo (lo a priori); de acuerdo con el segundo, se deja llevar por el esencialismo de las cualidades (pues su teoría de la medida le obliga a considerar que sólo podemos medir lo cualitativamente similar):⁴⁶ "de aquí que el reconocimiento de las propiedades esenciales del espacio no pueda lograrse nunca partiendo de juicios de cantidad, los cuales

⁴⁶ Por eso concluye la defensa de la matemática ante los ataques filosóficos de Lotze así: "I must, instead, rejoice that Mathematics has not been imposed upon by philosophy, but has developed freely an important and self-consistent system, which deserves, for its subtle analysis into logical and factual elements, the gratitude of all who seek for a philosophy of space" (FG, 108).

descuidan esas propiedades a pesar de presuponerlas" (FG, 64). Se trata, una vez más, de una concepción heredada, común a Ward⁴⁷ y a Hannequin (sobre la base de Bradley y Kant), según la cual la ciencia se limita a describir superficialmente la realidad del mundo, cuyas características básicas (continuidad, infinitud) se le escapan de las manos por ser irreductibles.

8. La polémica sobre los axiomas de la geometría

Las reacciones a FG tuvieron lugar principalmente en Francia, donde fueron saliendo recensiones y artículos, casi siempre polémicos, especialmente referidos al carácter de los axiomas de la geometría tal como Russell los había presentado en la obra; sobre todo en lo concerniente a un punto concreto: el carácter empírico de los axiomas euclídeos⁴⁸ (en contraste con los axiomas comunes a toda geometría, que serían a priori).⁴⁹

La polémica comenzó con la publicación de la recensión de Couturat (1898a). Su idea más importante críticamente es que los axiomas euclídeos no son empíricos, es decir, no pueden ser verificados mediante la experiencia. Para defender esta idea se apoya en Klein y Poincaré añadiendo que, muy al contrario, tales axiomas son necesarios y a priori, especialmente el axioma de las tres dimensiones que depende, según Couturat, de nuestra manera de percibir.⁵⁰

Russell respondió (1898) insistiendo en el carácter empírico de los axiomas, argumentando, como en FG, que toda la ciencia presupone el espacio euclídeo. Incluye como novedad un intento de reducir lo a priori a los conceptos de verdad y necesidad: lo a priori no depende de nuestra sensibilidad sino que constituye un criterio puramente lógico; con ello profundiza la distinción entre los dos tipos de a priori apuntada en FG haciéndose eco, ahora,

⁴⁷ No en balde Ward fomentó su curiosidad científica (como profesor) sobre bases kantianas (Spadoni 1977, 55).

⁴⁸ Los axiomas que según FG determinan el espacio euclídeo eran: (1) el espacio euclídeo tiene tres dimensiones; (2) por dos puntos dados pasa una sola recta, y (3) por un punto dado pasa una sola paralela a otra dada.

⁴⁹ Me referiré sólo a los trabajos de Poincaré y Couturat, aunque en la polémica participaron algunos otros autores. Los artículos son: Couturat 1898a y Poincaré 1899 y 1900. Por su parte, los trabajos relevantes de Russell son 1898 y 1899. En cuanto a la literatura, es muy escasa; sólo puedo mencionar a Torretti 1978, que apenas se refiere al tema, y a Dambaska 1974, que ha ofrecido un pequeño resumen de la polémica. Lo poco que se conserva de la geometría que Russell escribió en los manuscritos de 1898-1900 lo expongo en mis 1988a y 1991 (cap. 2) y no afecta a nuestro tema actual.

⁵⁰ Aquí Couturat se muestra kantiano, como en otros lugares, por ejemplo en 1896, situación que cambió posteriormente (véase su 1904). Su alejamiento de Kant vino a coincidir con el de Russell, aunque parece que contribuyó a la propia evolución de este último (véase mi 1987a, cap. 7).

de la influencia de Moore, en el sentido del predominio de lo lógico (véase mi 1990d). De acuerdo con ello el carácter de los axiomas no puede ser sino empírico, aunque se reconoce que las pruebas no son definitivas.

El artículo de Poincaré (1899) fue mucho más ligero y duro de pelar, aunque debió enorgullecer a Russell por el calibre del oponente. Poincaré critica el contenido de los axiomas proyectivos de Russell, que son calificados de insuficientes para deducir la geometría correspondiente. Asimismo, se reafirma la crítica de Couturat con el famoso argumento de que ninguna experiencia podría estar jamás en contra de la geometría euclídea, ni de ninguna otra, dado que antes de cambiar nuestra geometría podrían ponerse en duda las mismas leyes de la física que obligaban a determinada interpretación de nuestras observaciones. Posteriormente, se niega el carácter a priori de la geometría proyectiva y su pretendida independencia del movimiento (Poincaré reconoce sólo la topología como geometría cualitativa genuina). Por último, se reafirma en su postura nominalista calificando los axiomas de "definiciones disfrazadas" y rechazando las críticas de Russell a la convencionalidad de las definiciones.

La respuesta de Russell (1899) es toda una rendición a la eminencia del contrincante. Russell continúa manteniendo que la experiencia en general parece concordar con la geometría euclidiana, pero ya sólo sobre la base de un vago paralelismo con las leyes científicas en general. La novedad aquí radica en un nuevo conjunto de axiomas de la geometría proyectiva que se presentan como de carácter *formal* y suficiente. En cuanto al tema de la cantidad y la medida, Russell defiende, contra Poincaré, su postura clásica de que la primera es previa a la segunda (aunque, más tarde se plegó a la crítica de Poincaré; véanse mis 1988a y 1991, cap. 2). Por último, Russell rechaza la posibilidad de definir la distancia sobre la base mooreana de la necesidad de indefinibles, a partir de lo cual teoriza sobre el tema de la definición terminando por anunciar una obra dedicada al tema.

Aún respondió Poincaré (1900) a este tímido intento de Russell, de nuevo de manera avasalladora: la distancia queda *definida* por los postulados de Euclides; su carácter de "indefinible" no puede aceptarse sobre la base de una vaga sensación (Poincaré prefiere llamarla noción "primitiva"). Lejos de ello, con los axiomas precisamos la noción vaga que tenemos de la distancia: un término no es nada más que sus relaciones con los demás. El resto de la resistencia de Russell sobre lo empírico de los axiomas de Euclides queda anulado argumentando que ninguna experiencia puede rebasar el marco de las meras relaciones entre los cuerpos y decirnos algo sobre el espacio en sí mismo.

El interés de la polémica radica, para nosotros, en comprender las precisiones metodológicas de Russell, en el marco esencialista de su postura sobre

la definición y los axiomas. Ya en su caracterización del a priori puede verse el progreso que supuso la influencia de Moore sobre la postura de FG hacia una mayor importancia de lo lógico. Al igual que Moore, Russell declara ahora que lo verdadero es algo indefinible y, por supuesto, inverificable (como hizo en los manuscritos de 1898-1900; véanse mis 1988a y 1991, cap. 2), aunque aquí añade "lo necesario" a la lista de indefinibles: "No hay, en general, prueba alguna de lo verdadero ni de lo necesario. Las dos ideas son últimas e inanalizables" (1898, 770). Y no puede haberla, continúa Russell, porque el que una proposición sea verdadera es previo al conocimiento que podamos tener de ella (no podemos "conocer" lo falso). Asimismo, nuestra percepción no puede *fundar* la necesidad, por ello nuestra forma de ser no puede producirla (contra Couturat); sin embargo, en definitiva Russell se remite también a la intuición: "Percibimos que una proposición es necesaria como percibimos que el cielo es azul" (*ibid.*).

Es en lo indefinible donde Russell encuentra el firme asidero que necesita para su esencialismo: como la necesidad no puede probarse en sí misma, ha de atenderse, para constatarla, a las consecuencias de lo que se nos muestra como necesario. Por eso, añade Russell, la prueba de que una proposición es empírica (como los axiomas euclídeos) ha de ser forzosamente vaga y depender de los dos criterios siguientes: que la proposición no parezca necesaria o que no sea condición o consecuencia de otra proposición admitida como tal. Y ambos criterios son satisfechos, según Russell, por los axiomas euclídeos.

Lo más interesante aquí es constatar el hecho de la base a priori de lo indefinible/indemostrable en su perfecta *liaison* con la intuición (aunque ya no del todo kantiana). Una vez más el nexo entre Moore y Kant sirve a Russell para salir del atolladero del convencionalismo y el psicologismo. Es precisamente esa *necesidad* de la intuición de los indefinibles la que justifica el núcleo de la polémica concreta con Poincaré. Russell partía en FG de una postura sobre la definición que hacía imposible rebasar el marco esencialista presupuesto en la intuición del lenguaje ordinario. Para Poincaré, en cambio, los axiomas mismos definen ya el concepto y no hay la menor posibilidad de obtener una definición independiente: "Para que una propiedad sea un axioma o un teorema es necesario que el objeto que posee esta propiedad haya sido definido de manera completamente independiente de esta propiedad" (Poincaré 1899, 274). Con lo que no quedaría más refugio que la intuición, de la cual Poincaré se declara "falto".

Para responder adecuadamente, Russell necesitó desarrollar la distinción, ya aparecida en FG y en los manuscritos, entre definiciones matemáticas y filosóficas, ahora sobre la base de la filosofía mooreana (véase mi 1990d). El núcleo del argumento está en la distinción entre propiedad y relación: así

como las definiciones matemáticas establecen relaciones únicas con conceptos ya conocidos, "filosóficamente un término se define cuando se conoce su *sentido (sens)*, y su *sentido* no puede consistir en relaciones con otros términos" (1899, 700). De nada serviría, en consecuencia, utilizar el lenguaje matemático para resolver problemas filosóficos. En éstos se requiere poseer las intuiciones correspondientes; de nada sirve la precisión técnica: "incluso cuando se ha logrado la precisión, el sentido de los términos fundamentales no puede definirse sino solamente sugerirse. Si la sugerencia no evoca en el lector la idea justa, no hay nada que hacer" (1899, 702-3). En realidad puede incluso decirse que fue precisamente esta distinción entre lo "técnico" y lo filosófico, que procedía en última instancia de la distinción bradleyana entre lo conocido directamente y lo construido (véase mi 1990d), la que hizo posible que Russell asimilara de manera tan rápida la teoría del análisis de Moore, que aportó un núcleo lógico-ontológico irreductible y ayudó a sacar el a priori (y la intuición en general) del subjetivismo kantiano.

Esta posición es la que fundamenta ahora la visión del análisis de la ideas espaciales de Russell, que sigue recordando todavía el "doble proceso" que parecía abandonado desde los primeros manuscritos de 1898-1900 (véase mi 1991): "Un tal análisis se justifica: 1º por la sensación inmediata de su exactitud; 2º deduciendo de los elementos obtenidos los conceptos complejos que han sido analizados; 3º demostrando que las teorías rivales no llevan el análisis tan lejos ni permiten todas las deducciones exigidas" (1899, 703). Por tanto, cuando como tantas otras veces constatamos que lo importante para el método de Russell es encontrar y articular los indefinibles y sus indemostrables correspondientes (que no son más que relaciones), no podemos sorprendernos de la indistinción implícita entre conceptos y axiomas. Ambos constituyen la doble cara de una misma realidad: el pluralismo de los simples y las relaciones externas entre ellos. Más adelante y bajo la influencia de Whitehead y Wittgenstein se suavizó la distinción entre lo técnico y lo filosófico, aunque el esencialismo siguió vigente bajo la creencia en la posibilidad de un lenguaje lógico ideal, que llevó a una visión nueva de la intuición. Pero, incluso cuando la postura de Russell se hizo más y más "lingüística", siguió pensando en la posibilidad de reducir parcelas completas de nuestro conocimiento a una serie de axiomas *presupuestos* de los cuales puede deducirse, después, su contenido. Lo cual es otra forma de decir que el viejo recurso del "doble proceso" es otra de las constantes del método russelliano.

También desde este punto de vista global podemos valorar el auténtico sentido de los nuevos axiomas "formales" que ofrece Russell en su respuesta a Poincaré. Humildemente, Russell se hace eco de las insuficiencias del planteamiento de FG denunciadas por su oponente; y lo hace admitiendo diversos cambios de opinión desde aquella publicación (1899, 684), que

debían incluir: la influencia de Moore y Whitehead; sus intentos inéditos; la influencia de Pieri 1898 (un ejemplar del cual se hallaba en su poder desde marzo de ese año), y la de Couturat 1898b (véanse mis 1988c y 1991, cap. 1).

Se trata de un conjunto de seis axiomas de incidencia, es decir, que establecen condiciones según las cuales ciertos "objetos", al incidir entre sí o con otros, determinan nuevos objetos. Es un punto interesante precisamente por recoger, así, toda la problemática de la interdefinibilidad y el principio de dualidad, que tantas dificultades causaron a Russell en FG. El primero de ellos dice (parcialmente) así (1899: 697):

Hay una clase A de objetos (A_1, A_2, A_3, \dots) tales que dos cualesquiera de entre ellos, A_1 y A_2 por ejemplo, determinan de manera única otro objeto a_{12} perteneciente a una clase a diferente. Pero un objeto a no determina, inversamente, de manera única los objetos A que lo determinan. Si el objeto a_{12} determinado por A_1 y A_2 no es idéntico al objeto a_{13} determinado por A_1 y A_3 , entonces los tres objetos A_1, A_2 y A_3 determinan de manera única un objeto α_{123} perteneciente a una nueva clase α , que no determina tampoco de manera única los objetos que lo determinan.

Con sólo esta presentación el carácter *formal* de los axiomas queda ya claro, aunque, para sorpresa del lector (dada la fecha: 1899), Russell añade inmediatamente después del último axioma: "Para deducir de estos axiomas la Geometría proyectiva basta leer *punto* (o *plano*) en lugar de A , *línea recta* en lugar de a , y *plano* (o *punto*) en lugar de α ". Es indudable que semejante proceder recuerda al de Hilbert, dado que los axiomas establecen condiciones formales que se cumplen "independientemente" de los valores que otorguemos a las variables. Esa apariencia, sin embargo, no puede en ningún caso ser entendida más allá de las limitaciones claramente esencialistas (e *intuicionistas*) a las que me he referido más arriba. Por ello, ver aquí (Torretti 1978, 306-7) una concepción al estilo de Pasch parece deberse a no apreciar suficientemente el lugar de esta polémica en el propio desarrollo de Russell. En cuanto a atribuir a Russell originalidad con respecto a la "escuela italiana" (como también hace Torretti), aduciendo que no necesitó acudir al Congreso de París de 1900 para descubrir el planteamiento formalista, es sólo parcialmente cierto: como decía más arriba parece que Russell conocía ya el trabajo de Pieri de 1898.

Es cierto que Russell presenta sus axiomas de manera explícitamente formal, pero la diferencia con, por ejemplo, Hilbert (la escuela italiana era más "logicista"), es abismal: para él los axiomas *no definen implícitamente* los conceptos que hacen de variables en los axiomas (como pensaban los primeros "formalistas"): era necesario *previamente* conocer (intuir, imaginar, visualizar) esas nociones simples para poder constatar la *verdad* de tales axiomas que, como hemos visto más arriba, sólo enuncian propiedades de

ciertos conceptos y no de otros. Si Russell los establece con letras es sólo porque: (i) hacen posible la interdefinibilidad entre puntos, rectas o planos (por eso añade después que en el curso de la demostración de la suficiencia de los axiomas se establece el principio de dualidad; p. 698), y (ii) considera real la posibilidad de establecer un cálculo formal del cual los axiomas constituyan las leyes (con lo que se apoya en Grassmann, Whitehead y también en Pieri, ninguno de los cuales distinguía claramente entre axiomas y reglas de inferencia). Así, como en el cálculo formal, los axiomas no exigen el recurso a la "imaginación visual" (p. 699), pero cuando queramos deducir de ellos el contenido concreto de la geometría proyectiva, habremos de sustituir las variables sólo por aquellos conceptos que de hecho establecen la interpretación correcta.

La idea que subyace es, pues, la de *interpretación*, ya vieja desde Boole y familiar a Russell por sus estudios de álgebra (Whitehead), pero no la de *definición implícita*. Aquí, como en el futuro POM, Russell no acepta la posibilidad de que un concepto pueda establecerse exclusivamente a través de relaciones. Aunque matemáticamente ello sea posible para el funcionamiento "técnico", desde el punto de vista "filosófico" es imprescindible la intuición directa de la simplicidad de los conceptos; y, precisamente, los conceptos de punto, línea y plano son simples e indefinibles. De todo ello podemos concluir, tanto que el rechazo a las definiciones estructurales está ya presente antes del Congreso, como que la convencionalidad de los axiomas es incompatible con la visión russelliana de la intuición y de la verdad.⁵¹

Instituto S. Vilaseca, Departamento de Filosofía

⁵¹ En 1901 se publicó la traducción francesa de FG, aunque desde nuestro punto de vista ninguna de las "revisiones" que anuncia Russell en el nuevo prefacio (en realidad escasas) tiene interés, suponiendo, en general, respuestas a ciertas críticas (concretamente en §§ 14, 79 y 151). Lo cierto es que Russell prefirió la mera reedición a emprender una revisión que hubiese hecho irreconocible la obra anterior. Pero debió, al menos, advertirlo (este hecho fue ya señalado por Damska 1974).

BIBLIOGRAFÍA

- Blackwell, K. 1972, "An essay on the foundations of geometry". *Russell*, 6: 3-4.
- Bonfantini, M.A. 1970, "Il primo Russell o il canto del cigno della geometria kantiana". *Acme*, 23: 359-433.
- Bowne, G.D. 1966, *The philosophy of logic 1880-1908*. La Haya: Mouton.
- Couturat, L. 1896, *De l'infini mathématique*. Paris: Alcan.
- 1898a, Recensión de B. Russell, *Foundations of Geometry*. *Rev. Mét. Mor.*, 6: 354-8.
- 1898b, "Sur les rapports du nombre et de la grandeur". *Rev. Mét. Mor.*, 6: 422-47.
- 1904, "La philosophie des mathématiques de Kant". *Rev. Mét. Mor.*, 12: 321-83.
- Dambaska, I. 1974, "An essay on the foundations of geometry de B. Russell et la critique de ce livre en France dans les années 1898-1900". *Organon*, 10: 245-53.
- Grattan-Guinness, I. 1986, "Russell's logicism versus Oxbridge logics 1890-1925: a contribution to the real history". *Russell*, 5: 101-31.
- Griffin, N. 1988, "The Tiengarten programme". *Russell*, 8: 19-34.
- Hannequin, A. 1895, *Essai critique sur l'hypothèse des atoms*. Paris: Masson.
- Hegel, G.W.F. 1817, *Enciclopedia*, tr. cast. de E. Ovejero. Buenos Aires: Claridad, 1969.
- Kant, I. 1781, *Kritik der reinen Vernunft*. Tr. cast. de P. Ribas. Madrid: Alfaguara, 1978.
- 1783, *Prolegomena*. Tr. cast. de J. Besteiro. México: Porrúa, 1973.
- Kilmister, C.W. 1984, *Russell*. Londres: Harvester.
- Moore, G.E. 1899, Recensión de B. Russell, *Foundations of Geometry*. *Mind*, 8, 397-405.
- Nagel, E. 1939, "The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry". *Osiris*, 7: 142-224.
- Pieri, M. 1898, "I principii della geometria di posizione". *Memorie Real. Accad. Sc. di Torino*, 48: 1-62.
- Poincaré, H. 1899, "Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell". *Rev. Mét. Mor.*, 7: 251-79.
- 1900, "Sur les principes de la géométrie". *Rev. Mét. Mor.*, 8: 73-86.
- Richards, J.L. 1988, "Bertrand Russell's *Essay on the Foundations of Geometry* and the Cambridge mathematical tradition". *Russell*, 8: 59-80.
- Rodríguez Consuegra, F. 1987a, *El método en la filosofía de B. Russell. Un estudio sobre los orígenes de la filosofía analítica a través de la obra de Russell, sus manuscritos inéditos y los autores que más le influenciaron*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, x + 800 folios. Disponible en versión microfichada, ya editada, sobre pedido.

- 1987b, "Bibliografía de B. Russell en español". *Mathesis*, 3: 183-197.
- 1987c, "Russell's logicist definitions of numbers 1898-1913: chronology and significance". *History and Philosophy of Logic*, 8: 141-69.
- 1988a, "Bertrand Russell 1898-1900: una filosofía de la matemática inédita". *Mathesis*, 4: 3-76.
- 1988b, "Elementos logicistas en la obra de Peano y su escuela". *Mathesis*, 4: 221-299.
- 1988c, "Bertrand Russell 1900-1913: los principios de la matemática, parte 1ª". *Mathesis*, 4: 355-392.
- 1988d, "Bertrand Russell 1900-1913: los principios de la matemática, parte 2ª". *Mathesis*, 4: 489-521.
- 1989a, "Russell's theory of types, 1901-1910: its complex origins in the unpublished manuscripts". *Hist. Phil. Log.*, 10: 131-164.
- 1989b, "The origins of Russell's theory of descriptions according to the unpublished manuscripts and its methodological significance". De próxima publicación en *Russell*.
- 1989c, "La 'pérdida de certidumbre' en la matemática y la ciencia contemporáneas". De próxima publicación en *Mathesis*.
- 1990a, "Russell's first technical philosophy". Ensayo-reseña de I. Winchester y K. Blackwell (eds.), *Autonomes and Paradoxes. Studies in Russell's early philosophy*, Hamilton: McMaster University Press, 1989 (*Russell* 8, 1988, nos. 1-2). De próxima publicación en *Hist. Phil. Log.*, 11/1.
- 1990b, "El impacto de Wittgenstein sobre Russell: últimos datos y visión global". De próxima publicación en *Theoria*.
- 1990c, "El logicismo russelliano: origen, evolución y significado filosófico". De próxima publicación.
- 1990d, "La primera filosofía de Moore". De próxima publicación en *Agora*.
- 1990e, "La influencia de Bradley en los orígenes de la filosofía analítica". De próxima publicación.
- 1991, *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: origins and development*. De próxima publicación en Nápoles: Bibliopolis.
- Russell, B. 1893, "Paper on epistemology, II". Pub. póst. en Russell 1983, 124-30.
- 1895a, Recensión de G. Heymans: *Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens*. *Mind*, 4: 245-9. Reimp. en Russell 1983.
- 1895b, "Observations on space and geometry". Pub. póst. en Russell 1983, 256-65.
- 1896a, "The logic of geometry". *Mind*, 5: 1-23. Reimp. en Russell 1983.
- 1896b Recensión de G. Lechalas: *Études sur l'espace et le temps*. *Mind*, 5: 128. Reimp. en Russell 1983, 287-8.
- 1896c "The *à priori* in geometry". *Proc. Arist. Soc.*, o.s., 3: 97-112. Reimp. en Russell 1983.
- 1896d, Recensión de A. Hannequin, *Essai critique sur l'hypothèse des atomes dans la science contemporaine*. *Mind*, 5: 410-17.

- 1897 [FG], *An essay on the foundations of geometry*. Londres: Cambridge University Press. Edición revisada francesa (con muy pocos cambios): *Essai sur les fondements de la géométrie*, Paris: Gauthier-Villars, 1901.
- 1898, "Les axiomes propres à Euclide, sont-ils empiriques". *Rev. Mét. Mor.*, 6: 759-76.
- 1899, "Sur les axiomes de la géométrie". *Rev. Mét. Mor.*, 7: 684-707.
- 1902, "What shall I read?" Registro personal de las lecturas de Russell de 1891 a 1902, no siempre fiable pero si útil. Pub. póst. en Russell 1983, 345-65.
- 1903 [POM], *The principles of mathematics*. Londres: Cambridge University Press. Reimp. con nueva introducción, Londres: Allen & Unwin, 1937.
- 1959, *My philosophical development*. Londres: Allen & Unwin, 1975.
- 1983, *Cambridge essays, 1888-99*. Vol. 1 de *The Collected Papers of Bertrand Russell*. Londres: Allen & Unwin.
- Spadoni, C. 1977, *Russell's rebellion against neo-hegelianism*. Tesis doctoral inédita, Universidad de Waterloo, Ontario, Canadá.
- Stallo, J.B. 1882, *The concepts and theories of modern physics*. Londres: Kegan Paul, 1900.
- Torretti, R. 1974, "La geometría en el pensamiento de Kant". *Anales del Seminario de Metafísica* [Universidad Complutense de Madrid], IX: 9-60.
- Torretti, R. 1978, *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: Reidel.
- Watling, J. 1970, *Bertrand Russell*. Edimburgo: Oliver.
- Whitehead, A.N. 1898, *A treatise on universal algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera mencionar aquí a Josep Rifá, que leyó una versión anterior y aportó valiosas observaciones. También a Kenneth Blackwell, director de los Archivos Russell en Hamilton, Canadá (institución donde se hallan depositados los manuscritos inéditos de Russell y poseedora de los derechos de impresión), de quien he venido obteniendo durante años material e informaciones imprescindibles. Sin olvidar a Ivor Grattan-Guinness y Alejandro Garcíadiego, que han supuesto un estímulo constante para la finalización de mi tesis doctoral sobre Russell. Por último, debo agradecer a Roberto Torretti, autor de la mejor obra actual sobre filosofía de la geometría, el brindarme las páginas de *Diálogos* para exponer mi estudio sobre la primera filosofía de la geometría russelliana, así como sus comentarios sobre una primera versión de este trabajo, que han supuesto mejoras terminológicas, expositivas, históricas y técnicas.