Diálogos, 84 (2004) | pp. 77-105

EL ARGUMENTO ONTOLÓGICO: LA VARIANTE DE GÖDEL DE LA VERSIÓN DE LEIBNIZ

JORGE ALFREDO ROETTI

> *¿Cómo es posible que la matemática, que es un producto del pensamiento humano completamente independiente de toda experiencia, se adecue tan perfectamente a los objetos de la realidad? ¿Puede acaso la razón humana penetrar en las propiedades de las cosas reales sin experiencia, mediante el mero pensar?*[1]
>
> Albert Einstein

Esta célebre pregunta de Einstein respecto de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos, cuyos supuestos no carecieron de críticas, se completa con un dilema extremo: "*En tanto las tesis de la matemática se refieran a la realidad no son seguras, y en tanto sean seguras no se refieren a la realidad.*"[2] Aquí no discutiremos esta relación, sino otra curiosamente análoga entre ciertas reglas de la razón -codificadas en un cálculo lógico - y un dominio de lo nouménico, el de la teología natural: más precisamente la relación entre la lógica y el argumento ontológico.

El argumento ontológico o *probatio existentiae* DEI *ex eius essentia* es uno de los más seductores filosofemas de la historia de la filosofía. Kurt Gödel también fue seducido por él. En una carta a su anciana madre

[1] "*Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unhabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paßt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne die Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?*"

[2] "*Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.*" Los dos textos citados se encuentran en EINSTEIN 1921, nueva edición 1991, pp.119 s. Si un fragmento de protofísica es posible habría que moderar el dilema.

del 6 de octubre de 1961 le escribe: "*Hoy se está ciertamente muy lejos de poder fundar científicamente la imagen teológica del mundo, pero creo que ya hoy debería ser posible comprender de modo puramente racional (sin basarse en la fe de ninguna religión), que la cosmovisión teológica es plenamente compatible con todos los hechos conocidos. Esto ya lo ha intentado hace 250 años el famoso filósofo y matemático Leibniz.*"[3]

Gödel escribió su primera versión de su prueba probablemente en 1941. La última versión de que disponemos fue escrita el 10 de febrero 1970 y consta de dos páginas manuscritas constituidas por notas breves y abreviaturas no destinadas a la prensa, que fueron publicadas póstumamente. Por ser un mero boceto, y para facilitar su comprensión, las presentaciones que se dan de ese texto no son literales ni equivalentes: su prueba se interpreta de diferentes maneras. Lo que sí está fuera de duda es que Gödel se ocupó del argumento al menos durante treinta años, es decir durante más tiempo que el que dedicara a ningún otro problema. Su última versión es posterior a las tres publicaciones de la famosa reconstrucción de Charles Hartshorne (*1897-†2000),[4] que sin duda fueron consideradas por nuestro autor y lo influenciaron, al menos críticamente. La base lógica de la prueba de Gödel consta de una extensión de la lógica modal de predicados de segundo orden S5 más algunos principios, reglas y definiciones específicos, relativos a la necesidad de los enunciados y la "positividad" de los predicados,[5] que es el término que reemplaza en su versión a la noción de 'perfección', aunque también utilice ese término. Aquí consideraremos brevemente algunas características de la versión de Leibniz del argumento, luego propondremos una versión fundada en las axiomatizaciones de GÖDEL 1970, de ANDERSON 1990 y de

[3] "*Man ist natürlich heute weit davon entfernt, das theologische Weltbild wissenschaftlich begründen zu können, aber ich glaube, schon heute dürfte es möglich sein rein verstandesmäßig (ohne sich auf den Glauben an irgend eine Religion zu stützen) einzusehen, das die theologische Weltanschauung mit allen bekannten Tatsachen [...] durchaus vereinbar ist. Das hat schon vor 250 Jahren der berühmte Philosoph und Mathematiker Leibniz versucht.*" Citado por SCHIMANOVICH-GALIDESCU 2001 (tomo la cita de FUHRMANN 2001, 20).

[4] HARTSHORNE 1944, 1962, cap. II y 1965.

[5] Dichos cálculos de segundo orden limitados se puede traducir frecuentemente al primer orden, por ejemplo recurriendo a una "*sortal logic*" de primer orden. La notación utilizada es la de Lorenzen.

BJØRDAL-FUHRMANN 1998-2001, con algunas modificaciones.[6] Siguen algunos comentarios al sistema, al problema de las propiedades, las perfecciones y la existencia y concluiremos con algunas observaciones. Por brevedad no ingresaremos al interesante tema de las numerosas interpretaciones y críticas que recibió la prueba.

§ 1. El intento de Leibniz: algunas de sus características.

Aunque la versión leibniziana del argumento ontológico sea el desarrollo más conocido de su teología natural él mismo insistió con otros argumentos. En su obra se proponen cinco: el cosmológico (o por la razón suficiente), el argumento por las verdades eternas, el argumento por el propósito (o por la armonía preestablecida) el argumento modal, que sería su preferido, y el argumento ontológico, que es el que aquí consideramos. Para Leibniz la *probatio existentiae Dei ex eius essentia* constaba en lo esencial de dos teoremas modales:

(I) $\vdash \nabla \forall x.D(x)$ ("es posible que exista (al menos un) Dios") y

(II) $\vdash \nabla \forall x.D(x) \rightarrow \Delta \forall y.D(y)$ (esta es la "pendiente modal invertida": "si es posible que exista (al menos un) Dios, entonces necesariamente existe (al menos un) Dios").[7]

Leibniz admitía que Descartes ya había resuelto el segundo teorema, pero echaba de menos que no hubiese intentado una demostración del primero. Demostrar que puede existir (al menos) un "*ens perfectissimum*" es lo que se suele llamar también el teorema de "consistencia" semántica de la noción de Dios, donde 'consistencia' significa aquí 'posibilidad de la existencia de al menos una instancia' ($\vdash \nabla \forall x D x$). Puesto que Dios es el ser perfectísimo todas sus cualidades serán positivamente valiosas y, salvo las que no admiten grado (como la identidad x = x, si fuese considerada una perfección), serán superlativas absolutas: Dios será por ejemplo 'omnisciente', 'omnipotente', 'infinitamente bueno', etc. Aquí se plantean al menos tres problemas:

---

[6] GÖDEL1970, 403-4 y ANDERSON 1990, 291-303, FUHRMANN 2001, 1-25.

[7] O al menos $\vdash \nabla \forall x D(x) \rightarrow \forall y D(y)$, la "*propositio memorabilis*" de Leibniz, que se deduce de uno de los teoremas fundamentales: $\vdash \nabla \forall x D(x) \rightarrow \Delta \forall y D(y)$. El problema de la unicidad de Dios se demuestra en un teorema separado.

(1) *Si es posible fundar* – suficientemente o, al menos, persuasivamente – *que algo* (propiedad, objeto, acontecimiento, etc.) *es positivamente valioso o no lo es.* Este es un problema difícil, pero hay argumentos favorables. Por ejemplo - y a diferencia de lo que dice Mefistófeles en el *Fausto* de Goethe-[8] algunos, como San Anselmo de Aosta, consideran a la existencia como el *primer predicado* de cualquier "*esse*" y como algo (i) *afirmativo* y *valioso*, (ii) *simple*, es decir no descomponible en aspectos, y la existencia necesaria se nos presenta como (iii) *sin limitaciones, negaciones o privaciones*. Al reunir estas tres propiedades la existencia necesaria sería una perfección (y una propiedad de segundo orden), aunque peculiar. Difícilmente se niegue valor al "ser". También hay "consenso cuasiuniversal" acerca de que ciertos objetos son positivamente valiosos, incluso con independencia de la estructura contingente del mundo, como los designados por sustantivos tales como 'sabiduría', 'poder', 'bondad', etc. Sin embargo estas consideraciones sólo argumentan a favor como "*éndoxa*", no como pruebas. Supuesta una solución afirmativa al menos débil o insuficiente de este problema, se nos presentan al menos otros dos:

(2) *Si algunas propiedades valiosas con grados, como 'sabio', 'poderoso' y 'bueno' admiten máximo, es decir si es posible que carezcan de limitación, y que ese máximo sea interna o absolutamente coherente.*

(3) *Si, en caso de tener máximo y ser interna o absolutamente coherentes, son también externa o relativamente coherentes.*

Supuesto (1), la consistencia o posibilidad de existir de un ser infinito, como el ser divino, depende de (2) y (3), e. d. de ambas coherencias interna y externa de sus propiedades. En nuestro caso se trata de la coherencia interna y externa de las perfecciones. Un ejemplo tradicional de contradicción interna de una perfección es el que surge de la pregunta: ¿Puede la omnipotencia divina crear una piedra tan pesada que él mismo no la pueda mover? Las dos respuestas posibles, 'sí' y 'no', parecen implicar, al menos en el dominio humano, la no omnipotencia divina. El caso recuerda nociones como la de "el mayor de los números posibles", de "el círculo más grande" o "la mayor de las figuras posibles", de "el

[8] GOETHE, *Faust*, I, 1338-1341: "*Ich bin der Geist, der stets verneint!/Und das mit Recht; denn alles, was entsteht,/Ist wert, daß es zugrunde geht;/Drum besser wär's, daß nichts entstünde.*" (¡Soy el espíritu que siempre niega!/Y con razón, pues todo lo que llega a ser,/merece sucumbir;/Por eso mejor fuera que nada surgiera.)

movimiento más rápido", etc. Todos ellos no pueden existir o no tienen "consistencia", *leibniziano sensu*, en el mundo matemático y físico de su época.[9] Sin embargo este problema no es tan grave, se puede superar las objeciones y defender, como lo hace el propio Leibniz (por ejemplo en LEIBNIZ 1686, I), que estas perfecciones por separado no encierran contradicción, por lo que serían ejemplos de infinitud absoluta actual o "buena infinitud". Pero aún en tal caso esos predicados podrían ser todavía relativamente contradictorios, como lo muestran algunas argumentaciones en la historia de la teodicea. Un caso tradicional de incompatibilidad relativa de perfecciones es el de la tríada 'omnisciencia', 'omnipotencia' e 'bondad infinita'. En la teodicea se encuentran argumentos favorables a la compatibilidad de dichas perfecciones, pero, aún en el caso de tener éxito en estos casos particulares, perdura la pregunta general: ¿Por qué deben ser compatibles *todas* las perfecciones? Lo que equivale a preguntar: ¿Por qué debería ser consistente o posiblemente existente un ser que poseyera en sí todas las perfecciones? El camino leibniziano sigue la tradición de concebir a la esencia divina como una conjunción de (posiblemente infinitas) perfecciones. Pero ¿cuales son las metapropiedades que caracterizan a una perfección? Para Leibniz éstas son las siguientes:

(1) son *propiedades absolutas* (en el caso de Gödel también pueden ser relaciones),

(2) son *positivamente valiosas*,

(3) son *ilimitadas*, es decir, carecen de grados o negaciones internas, esto es, no contienen limitaciones o privaciones.[10]

---

[9] El más grande de los números naturales, de los primos, de los ordinales, etc. conducen a contradicción y por lo tanto no pueden existir. En cambio el mayor círculo es consistente y existente ya en una geometría proyectiva con elementos impropios y obviamente también en una geometría riemanniana elíptica. Por su parte la mayor velocidad posible respecto de un sistema inercial cualquiera es consistente y existente en una teoría hipotética como la mecánica relativista.

[10] Cf. LEIBNIZ 1714, § 44-45: "*Et comme rien ne peut empecher la possibilité de ce qui n'enferme aucunes bornes, aucune negation et par consequent aucune contradiction, cela seul suffit pour connoitre l'Existence de Dieu a priori*" Ver también LEIBNIZ 1710, § 184-189, 335.

La condición de *elementalidad* o *simplicidad* es superflua para la metapropiedad de perfección: sólo se necesita lo establecido en *Monadologie* § 45, aunque es importante en el desarrollo de la argumentación leibniziana.

El problema central es el de si la conjunción de todas estas perfecciones es compatible o externamente coherente, e. d. de si puede ser instanciada. El camino leibniziano transita entonces por la reducción al absurdo: supongamos que dos perfecciones sean "incomposibles": ¿qué condición formal produce dicha incomposibilidad? Para Leibniz ello ocurriría sólo si una perfección contiene al menos una negación parcial de otra perfección o, dicho de otro modo, si ambas implican una contradicción:

$$\neg\nabla(P_1 \wedge P_2) \Leftrightarrow P_1, P_2 \vdash \bot.$$

Ello es lo que parece implicar el problema de la teodicea acerca de la incomposibilidad externa de predicados como 'omnisciencia', 'omnipotencia' e 'bondad infinita' en el caso de la divinidad, problema que ha recibido numerosos proyectos de solución a lo largo de la historia. Por otra parte ¿qué pasaría si ningún par de perfecciones implicara ningún aspecto de negación externa relativa? Entonces parece correcto admitir que su conjunción sería consistente, como argumenta Leibniz:

$$\nabla(P_1 \wedge P_2) \Leftrightarrow P_1, P_2 \pm \bot.$$

Esto se puede generalizar para un número *n* finito cualquiera de perfecciones y, si el sistema es compacto respecto de la propiedad de ser "perfección", también para un conjunto infinito de perfecciones. Pero ¿cómo nos aseguramos de que un par cualquiera de perfecciones no contienen ningún aspecto de negación y de que son por lo tanto completamente positivas? El camino leibniziano parece jugar con la idea de determinar un conjunto de las perfecciones elementales o simples, es decir que no se pueden descomponer en subperfecciones, y considerar a todas las perfecciones complejas como compuestas por conjunciones de estas perfecciones simples. Ahora bien, hemos visto arriba cuáles son las condiciones sintácticas que debe satisfacer una perfección elemental. Comparémolas con las propiedades que no son perfecciones: La propiedad visual '...es azul', por ejemplo, no es perfección porque, como (1) no es positivamente valiosa *independientemente de los intereses contingentes que quien juzga y del mundo en el que juzga*, (2) *tiene grado* o *limitación*, por lo tanto una negación interna (puede ser "más o menos azul", y no parece tener sentido empírico la expresión '...es absolutamente azul'), (3) pero, si '...es azul', tampoco '...es rojo', ni '...es amarillo', etc. y por lo tanto tiene negaciones externas reflexivas con '...es rojo', etc. que la torna incomposible con esas otras propiedades. Las propiedades perceptivas ejemplifican estas dos formas de negación: interna o *limitación* y externa o *incompatibilidad* con otras propiedades. Como hemos visto las perfecciones en general, y por lo tanto también las hipotéticas perfecciones simples, no admiten ni lo primero ni lo segundo: ni limitación o grado (o bien, en caso de tenerlo, que lo posean en grado supremo absoluto y no relativo a la "estructura accidental del mundo"), y mutua compatibilidad.

Si las perfecciones fuesen simples, entonces no contendrían ningún aspecto de negación interna ni externa y no habría incompatibilidad entre ellas. Por lo tanto su conjunción sería también una perfección: $P(\varphi_i \wedge \varphi_j)$. Por inducción sobre la clase de las perfecciones simples se obtendría que la conjunción de todas las perfecciones simples es una perfección:

$$P\varphi_1, \ldots, P\varphi_i, \ldots, P\varphi_n, \ldots \vdash P(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \ldots).$$

Y si el sistema fuese compacto respecto del metapredicado '...es perfección', y en el caso que nos ocupa – como veremos - no hay fundamentos para sostener lo contrario, podríamos extender esto a una consistencia transfinita para un conjunto infinito actual de perfecciones. De aquí, bajo ciertas condiciones lógicas, se deduciría la condición de consistencia para la divinidad: $\vdash \nabla \mathrm{V}x.D(x)$.

Parece compatible con la argumentación leibniziana que, si se pudiese determinar una "base" de perfecciones elementales o simples (pues podría haber más de una), y si la definición de Dios consiste en la conjunción de todas ellas, obtendríamos por inducción completa una perfección suprema plenamente compatible y a partir de allí una demostración de la posible existencia del *ens perfectissimum*. Mas en tal caso Leibniz debería probar en primer término la existencia de al menos una base de propiedades positivas simples. Pero 'elemental' o 'simple' es nuevamente una metapropiedad suprema. Entonces aparecería para Leibniz un tercer problema, el de demostrar que:

(III) Existen propiedades simples,

problema que podría ser tan difícil de resolver como el de la posibilidad de la existencia de Dios. Y no sabemos siquiera que Leibniz se haya planteado el problema, y menos aún que se haya resuelto jamás.

§ 2. Una versión del argumento ontológico según Gödel.

Por el tratamiento que emprende Gödel parece que esas posibles dificultades señaladas en el argumento leibniziano lo hubiesen convencido de que la posible via leibniziana para la prueba de la posibilidad de la existencia de Dios mediante perfecciones simples era un callejón sin salida (aunque en una conjetural "segunda prueba" Gödel retornaría a esa vía leibniziana). Por eso emprende una vía diferente que establece una caracterización formal de lo que es una perfección o propiedad positiva, independiente de su grado de complejidad, y adopta una base teórica que ya mencionamos arriba. Esta base nos permite demostrar que el conjunto de las perfecciones es compacto respecto de la perfección de sus subconjuntos. A partir de ella hay que demostrar un conjunto de teoremas que contenga al menos los siguientes:

(I) la consistencia del concepto de Dios: $\vdash \nabla \bigvee x.Dx$,

(ii) la pendiente modal invertida: $\vdash \nabla \bigvee x.D(x) \rightarrow \Delta \bigvee y.D(y)$.

(iii) la unicidad de Dios: $\vdash Dx \rightarrow \Delta \bigwedge y(Dy \rightarrow x = y)$.

La estructura de la demostración de estilo goedeliana es tal que no es necesario demostrar el tercer problema no considerado por Leibniz: los axiomas A1 y A5 que propone hacen que la existencia de propiedades elementales no sea requerida en ningún momento en esta a veces denominada primera prueba de Gödel.

La parte extrasintáctica de la argumentación goedeliana consistirá en fundamentar suficientemente que dicho cálculo sea el adecuado para la tarea que se ha propuesto. Esta tarea es de índole semántica y, aunque no necesariamente, se puede ejemplificar con una semántica de mundos posibles.

La base axiomática, inspirada en GÖDEL 1970, ANDERSON 1991 y FUHRMANN 2001, es la siguiente:

Notación:

(1) 'ΔE...' es un (meta)predicado[11] que se lee '...existe necesariamente',

[11] Técnicamente es un metapredicado (v. MORSCHER 1982, 163-99), pero aquí está, como en S. Anselmo de Aosta, "traducido" el lenguaje objeto, lo cual en esta versión es formalmente correcto.

(2) 'P...' es un (meta)predicado que se lee '...es un predicado (de primer orden) positivo'.

Definiciones:

D1. $Dx =_d \Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi x)$ ('D...' $=_d$ '...es Dios' o '... es divino'.)

D2. $\mathrm{Ess}(\varphi,x) =_d \Lambda\psi(\Delta\psi x \leftrightarrow \Delta\Lambda y(\varphi y \rightarrow \psi y)$ ('Ess...---' $=_d$ '...es esencia de---')

D3. $\Delta Ex =_d \Lambda\varphi(\mathrm{Ess}(\varphi, x) \rightarrow \Delta \mathrm{V}x\varphi x)$ ('ΔE...' $=_d$ '...existe necesariamente')

Axiomas:

A1. $\vdash P\varphi_1 \wedge P\varphi_2 \rightarrow P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$,[12]

A2. $\vdash P\varphi \rightarrow \neg P \neg\varphi$,

A3. $\vdash P\varphi \rightarrow \Delta P\varphi$

A4. $\vdash P\Delta E$ ("axioma anselmiano"),

A5. $\vdash P(\varphi) \rightarrow (\Delta\Lambda x(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow P(\psi))$.

§ 3. Comentarios al sistema axiomático propuesto.

'P...', o '... es una perfección' o '... es un predicado positivo', es un predicado de segundo orden que afirma *absolutamente*, es decir no respecto de un "mundo posible" particular (como dice Gödel, con independencia de la "estructura accidental del mundo"),[13] que un predicado de primer orden es *valioso* en sentido moral y estético. Sólo bajo esa condición sería defendible la verdad de los axiomas propuestos por Gödel. Se podría suponer que una propiedad es "perfección" o "positiva" cuando es una mera "atribución valiosa" que no implica ni explícita ni implícitamente ninguna limitación, por lo que coincidiría con la noción leibniziana de "perfección". Pero la concepción goedeliana de 'positivo' es en GÖDEL 1970 una generalización de la noción de perfección leibniziana, pues admite que una propiedad positiva adopte una

[12] Este axioma es inmediatamente generalizable a A1'. $\vdash P\varphi_1 \wedge \ldots \wedge P\varphi_n \rightarrow P(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

[13] GÖDEL 1995, 403.

forma normal disyuntiva $D_1 \vee ... \vee D_n$ de propiedades k-ádicas, si contiene al menos una conjunción generalizada $D_i \leftrightarrow C_1 \wedge ... \wedge C_m$ (con $1 \leq i \leq n$) que conste sólo de $1 \leq m$ propiedades afirmativas k-ádicas sin ninguna negación o limitación.

Las definiciones Def. 1-3 lo son de propiedades de segundo orden. D1 es la definición de Dios '*D*x', que es la propiedad de tener todas las propiedades "positivas" o "perfecciones" en el sentido de Gödel. Esta definición no supone que todas las propiedades de Dios sean perfecciones, sino sólo que las propiedades *esenciales* de Dios lo son. Utilizamos la versión de Anderson. Se la puede reemplazar por otra más débil como Dx _ $\Lambda\varphi(P\varphi \rightarrow \Delta\varphi x)$, e incluso por la de que propone Gödel Dx _ $\Lambda\varphi(P\varphi \rightarrow \varphi x)$. D2 precisa simbólicamente la noción metafísica de esencia 'Ess(φ,x)' y es una relación binaria de segundo orden. D3, también de segundo orden, define a la *existencia necesaria* 'ΔE' como una *propiedad*. Este es el punto central, que retoma la caracterización fregeana de los cuantores: estos serían predicados de segundo orden que precisan de qué modo o en qué extensión se dice un predicado de primer orden de una variable de individuo. Esto nos recuerda el argumento de Kant al rechazar el argumento ontológico de Leibniz-Wolff, que por una parte distingue entre los enunciados "*de secundo in adjecto*" y los "*de tertio in adjecto*" y sólo concede predicatividad "real" a estos últimos, pero no a los primeros, y por otra parte rechaza que la existencia sea una propiedad. Debilitamos la refutación kantiana del argumento ontológico:

(1) Recordando que el simbolismo lógico habitual permite reducir todas las predicaciones tradicionales a predicaciones *de secundo in adjecto* respecto de n-tuplas bien ordenadas, lo que debilita la refutación kantiana.

(2) Admitiendo que Kant tendría razón cuando dice que la existencia no es una propiedad, en tanto propiedad de primer orden, pero que se equivoca cuando niega absolutamente que lo sea, pues sería una propiedad de segundo orden. La existencia, en sus diversas formas, se podría considerar una propiedad peculiar de segundo orden, proyectada sobre el primer orden, que se dice del predicado o par ordenado sujeto-predicado. En su forma de existencia contingente 'Existe al menos un x que es φ' la simbolizamos habitualmente 'Vxφx', aunque ello no sea obligatorio.

(3) Estableciendo un orden de los grados que pueden tomar los meta-predicados de existencia obtenemos por ejemplo la siguiente sucesión:

$$\neg\nabla E < \neg E < \nabla E \wedge \nabla\neg E < \neg\neg E < E < \Delta\neg\neg E < \Delta E,$$

siendo los dos últimos los grados supremos o las dos formas de la perfección de la existencia. Cada una de estas formas de existencia *informa algo diverso* respecto del ser del caso: predicar la existencia necesaria 'ΔEx', es diferente a informar sobre una existencia contingente 'Ex', o sobre una existencia posible bilateral '$\nabla E \wedge \neg\nabla E$, etc. Veremos también que es posible concebir una existencia contingente débil $\neg\neg E$ y una fuerte E, como también una existencia necesaria débil '$\Delta\neg\neg E$' es diferente de la fuerte 'ΔE'. En un dominio no simbólico es importante distinguir entre la existencia necesaria débil '$\Delta\neg\neg E$' y la fuerte 'ΔE'. A esta última forma la podemos definir así:

$$\Delta E =_d E \wedge \Delta\neg\neg E.$$

Puesto que cada uno de estos predicados de existencia dice algo distinto de su sujeto, esto constituye un argumento fuerte en favor del carácter predicativo de los enunciados existenciales - en contra de la argumentación kantiana - y por lo tanto a favor de la existencia necesaria como perfección en las dos variantes que proponemos.

Gödel no se ocupa específicamente de las otras formas de predicación de existencia diferentes de la existencia necesaria fuerte 'ΔE'. De ella dice (en el caso de Dios), que es una perfección que se deduce de la esencia por lo que sería un "propio" divino en la terminología tradicional (como ya lo es en San Anselmo). Lo que afirma la definición de 'ΔEx' es que x existe necesariamente si y sólo si cada propiedad de la esencia es necesariamente real en algún ser.

El axioma A1 $\vdash P\varphi_1 \wedge P\varphi_2 \rightarrow P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ es el que aparece en GÖDEL 1970 y que afirma que la conjunción de dos propiedades "positivas" o perfecciones es también una propiedad positiva o perfección. Como Gödel lo indica en su nota 1 (p. 403), y nosotros arriba en nota 11, es trivial su generalización para *n* predicados:

A1'. $\vdash P\varphi_1 \wedge \ldots \wedge P\varphi_n \rightarrow P(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$, pues es un teorema inmediato.

A1 y su consecuencia A1' son "intuitivamente" defendibles, si se recuerda que la definición de perfección rechaza la presencia de toda negación o limitación en una perfección. Como bien lo expresa Gödel, éste y los restantes axiomas sólo serán verdaderos bajo una caracterización adecuada de las cualidades positivas, que es la de que lo sean con independencia de la *estructura contingente del mundo* (expresión metafísicamente más imparcial que la habitual de "todo mundo posible"), implicará que la "posibilidad" sea una metapropiedad necesaria, como expresa en A3. Tanto A1 como A1', junto a la propiedad de compacidad de este conjunto de propiedades positivas, permiten garantizar que la propiedad de ser Dios sea positiva. Se demuestra luego que dicha compacidad es un teorema. Otros autores, como Anderson, Fuhrmann, etc. reemplazan A1 precisamente por el teorema T8* ($\vdash PD$), aunque esta modificación no parezca compatible con el estilo de la argumentación goedeliana.

El axioma A2 ($\vdash P\varphi \rightarrow \neg P\neg\varphi$), es similar al de la versión de ANDERSON 1990 y afirma que, si una propiedad es positiva o perfección, entonces su negación no lo es, lo que se deduce incluso constructivamente de

$\vdash \neg P\varphi \vee \neg P\neg\varphi$,

es decir, de que tanto una propiedad cuanto su negación pueden no ser perfecciones, que es lo habitual entre las propiedades. Por ejemplo 'ser azul' y 'no ser azul' son dos propiedades contradictorias y ninguna de ambas es una perfección. La versión de Gödel, que utiliza el disyuntor inclusivo 'w' (como indica su nota 2 al texto), es más fuerte, a saber:

$\vdash P\varphi \mathrm{w} P\neg\varphi$.

En tal caso equivaldría a la conjunción

$\vdash (P\varphi \vee P\neg\varphi) \wedge (\neg P\varphi \vee \neg P\neg\varphi)$ de donde se sigue constructivamente

$\vdash (\neg P\varphi \rightarrow P\neg\varphi) \wedge (P\varphi \rightarrow \neg P\neg\varphi)$,

que es también semejante a la versión de Fuhrmann y cuyo segundo término coincide con el axioma de Anderson, que es suficiente para la demostración del argumento ontológico y que por eso utilizamos aquí. El primer término es innecesario, contraintuitivo, y para algunos críticos (p. ej. SOBEL 1987) permite fundar la tesis de que todas las verdades son necesarias, aunque esto es refutado por otros.[14] De todos modos la forma goedeliana de A2 se puede admitir, si limitamos nuestro universo a propiedades positivas en el sentido de Gödel y a sus negaciones.

El axioma A3 ($\vdash P\varphi \rightarrow \Delta P\varphi$), que ya justificamos intuitivamente más arriba, afirma que, si una propiedad es positiva, o una "perfección", entonces es necesariamente positiva o perfección. Por su estructura es semejante al usualmente denominado 'segundo axioma de San Anselmo', a saber el enunciado que dice 'si Dios existe, entonces Dios existe necesariamente': '$\vdash \mathrm{V}xD(x) \rightarrow \Delta \mathrm{V}xD(x)$' El paso de la mera aserción a la necesi-

---

[14] Es refutado por ejemplo por FUHRMANN 2001, 13-15.

dad en el axioma goedeliano se justifica al ser escogidas las propiedades positivas entre las que son independientes de la estructura accidental del mundo y por lo tanto indiferentes al mundo posible que se considere. Esto garantiza que Dios tenga las mismas propiedades en todo mundo posible o, dicho de otra manera, las perfecciones divinas son propiedades esenciales, lo que es parte del concepto tradicional de Dios.

A4 ($\vdash P\Delta E$), o '*axioma anselmiano*', afirma que la existencia necesaria es una propiedad positiva o perfección. San Anselmo sostenía que un ser que existe necesariamente es "mayor" que uno que existe contingentemente, y que éste es "mayor" que uno que no existe, aunque sea posible. La adopción de este axioma es una decisión teórica no sólo fundamental en la historia de la filosofía (no tanto en la de la lógica, sino primordialmente en la de la metafísica), sino además compleja. En primer lugar supone la decisión afirmativa frente al dilema de considerar a la existencia como una propiedad o no considerarla tal. Dicha decisión es necesaria para tornar viable el argumento ontológico; una decisión negativa lo hace imposible. Ya vimos que hay argumentos favorables para esa posición. Los aspectos valorativos en metafísica son difíciles, sino no imposibles, de evitar, aunque también son difíciles de fundar. En tercer lugar la existencia necesaria no sólo es una propiedad, sino que además es una perfección. Esto es importante, pues, si la existencia necesaria no fuese una perfección, entonces, al poder Dios carecer de ella, si existiera, existiría contingentemente, lo que sería compatible con su inexistencia y incompatible con su propia definición D1. El axioma es materialmente defendible, si recordamos el orden de los grados de los metapredicados de existencia que consideramos más arriba.

El A5 ($\vdash P\varphi \rightarrow (\Delta\Lambda x(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow P\psi)$) nos dice que, si una propiedad positiva implica necesariamente otra propiedad, ésta también será positiva. Este axioma gödeliano es extremadamente importante, pues, si de una perfección φ se dedujese una propiedad ψ que no lo fuese, entonces Dios podría no ser plenamente perfecto, contrariando así el concepto tradicional de Dios. Este axioma asegura entonces que la perfección plena es posible. La concepción más amplia del metapredicado 'P' que propone Gödel, que admite que sea una forma normal disyuntiva de propiedades $D_1 \vee \ldots \vee D_n$, con al menos un $D_i = P_1 \wedge \ldots \wedge P_m$, asegura dicha perfección plena aún si se admitiesen en Dios propiedades imperfectas (como la mera existencia y la existencia posible), como lo admiten autores como Hartshorne. Además este axioma, junto a A1, son las armas que permiten a Gödel resolver el problema de la consistencia de la composición de perfecciones *de modo deductivo* y no depender, como Leibniz, de las perfecciones elementales. De todos modos Gödel retorna en alguna ocasión a esa concepción leibniziana que da un lugar decisivo a la "elementalidad" de las perfecciones como fundamento de la composibilidad de las mismas, como aparece en el último pasaje del texto de 1970.

Este axioma A5 lo hemos presentado como una expresión de orden mixto. Otros, como el mismo Gödel y Anderson, prefieren una expresión de segundo orden puro:

A5' $\vdash P\varphi \rightarrow ((\varphi < \psi) \rightarrow P\psi)$.

Para Gödel "esta interpretación [proporciona una] demostración simple."[15]

§ 4. Algunos teoremas elementales.

Las versiones clásicas de los teoremas las indicamos con un asterisco. La lógica subyacente de Gödel es clásica. Para algunos teoremas podemos dar versiones intuicionistas más débiles, pero para otros, los últimos y decisivos, sólo logramos deducirlos con medios clásicos. La lógica clásica es empero adecuada para las propiedades que consideramos, especialmente las perfecciones, para las que sería admisible tanto el *tertium non datur* (*tnd*), como la eliminación de la doble negación (*dn*) (no discutiremos aquí la no relevancia de la base lógica). Sin embargo motivos *materiales*, que tienen que ver con el modo del conocimiento que podemos tener de Dios, nos llevarán a preferir una forma debilitada del teorema final. Admitimos pues el *tnd* y *dn*:

T1*. $\vdash P\varphi \vee \neg P\varphi$ y T1*'. $\vdash \neg\neg P\varphi \rightarrow P\varphi$.

También la implicación conversa de A3

T2. $\vdash \Delta P\varphi \rightarrow P\varphi$

es tesis por mera pendiente modal, por lo que también será teorema la equivalencia

T3. $\vdash P\varphi \leftrightarrow \Delta P\varphi$.

De A3 también se sigue por sustitución $P/\neg P$:

[15] Gödel 1995, 403: "This interpretation [supports a] simpler proof."

T4. $\vdash \neg P\varphi \rightarrow \Delta\neg P\varphi$,

es decir, que las propiedades no positivas o imperfecciones también lo son necesariamente. De modo igualmente trivial se demuestra la equivalencia

T5. $\vdash \neg P\varphi \leftrightarrow \Delta\neg P\varphi$.

§ 5. Los teoremas fundamentales.

T6*. *El conjunto de las perfecciones Π es compacto, es decir $P(\Pi)$* [16]

Dem. Dicho conjunto de perfecciones Π puede ser finito o infinito. Tenemos entonces dos casos:

Caso 1 (finito): La cardinalidad del conjunto de perfecciones es finita ($K(\Pi_n) = n \in \mathbb{N}$), lo que implica que se le puede asignar un ordinal finito (pues existe trivialmente un algoritmo de buena ordenación para todo conjunto finito). El caso se resuelve por reducción al absurdo (*raa*) e inducción finita hasta *n*. Supongamos que $\neg P(\Pi_n)$. Entonces una consecuencia será que existe al menos un par de perfecciones $\{P\varphi_j, P\varphi_k\}$ con subíndices j y k finitos tales que $\neg P(\varphi_j \wedge \varphi_k)$. Pero de $P\varphi_j$, $P\varphi_k$ se deduce $P\varphi_j \wedge P\varphi_k$ y por el axioma A1 y *modus ponens* concluimos $P(\varphi_j \wedge \varphi_k)$. Llegamos así a una contradicción, que basta para deducir por *raa* y doble negación que $P(\Pi_n)$.

Caso 2 (infinito): La cardinalidad del conjunto de perfecciones Π_α es infinita actual. La demostración se realiza por reducción al absurdo e inducción *transfinita*. Nos basta considerar sólo el caso de una infinitud actual enumerable $K(\Pi_\omega) = \aleph_0$.[17] Al conjunto de perfecciones Π_ω, al ser infinito actual, le corresponderá un ordinal transfinito α tal que $\omega \leq \alpha$ (aunque no podamos calcularlo, ya que le corresponde al menos uno y éste no puede ser finito). Demostrada la compacidad $P(\Pi_n)$ para el caso finito, aunque carezcamos de un algoritmo de buena ordenación para Π_α sabemos que, si Π_α no es compacto respecto de la perfección (es decir

[16] La demostración del segundo caso no dependerá del axioma de elección, por ejemplo de ZF, porque por la hipótesis del caso deberemos suponer la existencia de dos perfecciones a las que, por ser formalmente tales, se aplica el axioma A1.

[17] Las cardinalidades no enumerables son relativas al lenguaje utilizado y por lo tanto son constructivamente reducibles a una infinitud enumerable mediante traducción a un lenguaje más potente, como demostrara Paul Lorenzen en LORENZEN 1969, cap. 5, 191-3.

$\neg P(\Pi_\omega)$), entonces dicha incompacidad surgirá al menos entre dos perfecciones, $P\varphi_\beta$ y $P\varphi_\gamma$ tales que $\beta \neq \gamma$ y al menos uno de esos subíndices será transfinito ($\omega \leq \beta$ ó $\omega \leq \gamma$) y que serán incomposibles, es decir $\neg P(\varphi_\beta \wedge \varphi_\gamma)$. Pero, puesto que por hipótesis $P\varphi_\beta$ y $P\varphi_\gamma$ son formalmente perfecciones, formamos su conjunción $P\varphi_\beta \wedge P\varphi_\gamma$ y, dado que ambas subfórmulas tienen todas las propiedades formales de las perfecciones, podemos aplicar A1, lo que nos permite separar la conclusión $P(\varphi_\beta \wedge \varphi_\gamma)$, que contradice la consecuencia $\neg P(\varphi_\beta \wedge \varphi_\gamma)$ de la hipótesis del caso infinito. Esta contradicción basta para deducir por *raa* y *dn* que $P(\Pi_\omega)$. Esto completa la demostración.

T6. *El conjunto de las perfecciones Π es constructivamente compacto* $\neg\neg P(\Pi)$.

En la demostración clásica se usó la eliminación de la doble negación. Sin ella obtenemos constructivamente sólo $\neg\neg P(\Pi)$.

Las compacidades $P(\Pi)$ ó $\neg\neg P(\Pi)$ de todo conjunto finito o infinito de perfecciones, junto con D1 ($Dx =_d \Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi x)$), permitirán demostrar los teoremas T8* y T8.

El siguiente teorema es clásico:

T7*. $\vdash P\varphi \to \nabla Vx\varphi x$ (si una propiedad es una perfección, es posible que exista).

Dem.

01.	$P\varphi$	hip.,
02.	$\neg\nabla Vx\varphi x$	hip. aux. *raa.*,
03.	$\Delta\Lambda x\neg\varphi x$	02, *re.*,
04.	$\neg\varphi x$	03, EΔ, EΛ,
05.	$\vdash \neg\varphi x \to (\varphi x \to x \neq x)$	variante del *ex falso*,
06.	$\varphi x \to x \neq x$	04, 05, *mp.*,
07.	$\Delta\Lambda x(\varphi x \to x \neq x)$	06, IΛ, IΔ,
08.	$\vdash P\varphi \to (\Delta\Lambda x(\varphi x \to x \neq x) \to P(x \neq x))$	variante de A5,
09.	$P(x \neq x)$	01, 07, 08, *mp.* 2 veces,

10.	$\vdash P(x \neq x) \rightarrow \neg P(x = x)$	A2,
11.	$\neg P(x = x)$	09, 10, *mp.*,
12.	$\vdash x = x$	axioma de identidad,
13.	$\vdash x = x \rightarrow (\varphi x \rightarrow x = x)$	variante del *verum sequitur*,
14.	$\varphi x \rightarrow x = x$	12, 13, *mp.*,
15.	$\Delta\Lambda x(\varphi x \rightarrow x = x)$	14, IΛ, IΔ,
16.	$\vdash P\varphi \rightarrow (\Delta\Lambda x(\varphi x \rightarrow x = x) \rightarrow P(x = x))$	variante de A5,
17.	$P(x = x)$	01, 15, 16, *mp.* 2 veces,
18.	$\neg\neg\nabla\mathrm{V}x\varphi x$	02, 11, 17, *raa.*,
19*.	$\nabla\mathrm{V}x\varphi x$	18, *dn.*,

De 01 se deduce 19*. De ésta por introducción de '$\rightarrow$' se obtiene T7*.

Este teorema afirma que es posible que exista toda perfección, o que *lo absolutamente valioso es siempre posible*. La versión constructiva, de 01 a 18 y *re* constructivas, afirma sólo una posibilidad de existencia débil, pues al no poder ejemplificar o construir su objeto, afirma sólo que no es necesario que todo x sea $\neg\varphi$: T7. $\vdash P\varphi \rightarrow \neg\Delta\Lambda x\neg\varphi x$.
(El contenido de T7 y T7* es más general que el del principio práctico conocido como "axioma de Kant" en la lógica deóntica: $\Delta!A \rightarrow \nabla A$.)
T8*. $\vdash PD$ (ser Dios es una perfección) ó bien, en lógica constructiva:
T8. $\vdash \neg\neg P(D))$ (no es el caso que ser Dios no sea una perfección).

Dem. Por los T6* y T6 (compacidad del sistema de perfecciones: P(Π) ó $\neg\neg P(\Pi)$), sabemos que la conjunción de todas las perfecciones es una perfección (o al menos que no es el caso de que ser Dios no sea una perfección). Pero dicha conjunción de perfecciones Π es precisamente la que corresponde a la definición de Dios ($Dx =_d \Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi x)$). Por lo tanto ser Dios es una perfección (o al menos no es una no perfección).

T9*. $\vdash \nabla\mathrm{V}\mathrm{x}D\mathrm{x}$, (este "*teorema de Leibniz*" reemplaza al primer "axioma" de San Anselmo: "*Deus est possibilis*".

Dem.

01.	$\vdash PD \rightarrow \nabla\mathrm{V}\mathrm{x}D\mathrm{x}$	variante de T7*,
02.	$\vdash PD$	T8.

De 01, 02 y *mp.* se obtiene T9*, que es la primera parte esencial de la demostracion: el teorema modal (I) buscado por Leibniz, que dice que "es posible que exista Dios" o que el concepto de Dios es (semánticamente) consistente.

La versión constructiva es una posibilidad más débil de Dios.

T9.	$\vdash \neg\Delta\Lambda\mathrm{x}\neg D\mathrm{x}$	(no necesariamente no hay Dios).
01.	$\vdash \Delta\Lambda\mathrm{x}\neg D\mathrm{x} \rightarrow \neg PD.$	contraposición constructiva de T7,
02.	$\vdash \neg\neg P(D))$	T8.

El teorema surge de 01, 02 y *mt.*

T10*.	$\vdash D\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{Ess}(D, \mathrm{x})$	(la divinidad es una propiedad esencial).
01.	$D\mathrm{x}$	hip.
02.	$\Delta\varphi\mathrm{x}$	(φ es cualquier propiedad esencial de x, que es Dios),
03.	$P\varphi$	02, D1: $\Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi\mathrm{x})$, *re*,
04.	$\Delta P\varphi$	03, A3, *mp.*,
05.	$\Delta(P\varphi \rightarrow \Lambda\mathrm{y}(D\mathrm{y} \rightarrow \varphi\mathrm{y}))$	03, y el hecho de que Dios, por definición, tiene todas las perfecciones necesariamente.
06.	$\Delta P\varphi \rightarrow \Delta\Lambda\mathrm{y}(D\mathrm{y} \rightarrow \varphi\mathrm{y})$	05, distr. Δ,
07.	$\Delta\Lambda\mathrm{y}(D\mathrm{y} \rightarrow \varphi\mathrm{y})$	04, 06, *mp.*,
08.	$\Delta\varphi\mathrm{x} \rightarrow \Delta\Lambda\mathrm{y}(D\mathrm{y} \rightarrow \varphi\mathrm{y})$	02-07, I$\rightarrow$.

Hemos demostrado que, si x, que es D, tiene una propiedad esencial φ, ($\Delta\varphi x$), entonces ésta se deduce necesariamente de la propiedad D: $D < \varphi$.

La segunda parte de la deducción parte de las hipótesis $D < \varphi$, o lo que es equivalente:

09.	$\Delta\Lambda y(Dy \rightarrow \varphi y)$	
10.	$\vdash PD \rightarrow (\Delta\Lambda x(Dx \rightarrow \varphi x) \rightarrow P\varphi)$	variante de A5 y *re*: T8* ($\vdash PD$).
11.	$P\varphi$	T8*, 09, 10 y *mp*. 2 veces.
12.	$\Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Lambda\varphi x)$	01, D1,
13.	$\Delta\varphi x$	11, 12, *re*.,
14.	$\Delta\Lambda y(Dy \rightarrow \varphi y) \rightarrow \Delta\varphi x$	09-13, I$\rightarrow$.

Es decir, si de x, que es D, se deduce que tiene la propiedad φ, la tiene necesariamente:

15.	$\Delta\varphi x \leftrightarrow \Delta\Lambda y(Dy \rightarrow \varphi y)$	08, 14, I$\wedge$, def $\leftrightarrow$,
16.	$\Lambda\varphi(\Delta\varphi x \leftrightarrow \Delta\Lambda y(Dy \rightarrow \varphi y))$	15, IΛ.

Ésta es la segunda parte de la definición de esencia D2. Por lo tanto, por *re* obtenemos:

17. Ess(D,x)

De 01(Dx), 17 (Ess(D,x)) y I$\rightarrow$, obtenemos el teorema.

T11*. $\vdash Dx \rightarrow \Delta\Lambda y(Dy \rightarrow x = y)$ (iii) (éste es el tercer teorema fundamental o teorema de unicidad: si hay Dios, entonces necesariamente hay un solo Dios).

01.	Dx	hip.
02.	$\vdash Dx \rightarrow$ Ess(D, x))	T10*,

se sigue de Ess(D,x), que por A5 cada perfección de x se deduce necesariamente de la perfección D de ser Dios. Esto valdrá también para la perfección '...es idéntico con x', en el caso de Dx, es decir:

03.	$\Delta(x = x) \rightarrow \Delta\Lambda y(Dy \rightarrow x = y)$	
04.	$x = x$	axioma de identidad, aplicamos *nec*.

05. $\Delta(x = x)$ y de 03, 05, *mp*. separamos:

06. $\Delta\Lambda y(Dy \rightarrow x = y)$

Descargando la hip. 01, antecedente de 05, obtenemos el teorema de unicidad.[18]

T12*. $\vdash VxDx \rightarrow \Delta VxDx$. *(Si Deus existet, necesse est existens)*.

01.	$VxDx$	hip.
02.	Dy	01, hip. aux. EV,
03.	$\vdash Dy \leftrightarrow \Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi y)$	D1,
04.	$\Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi y)$	02, 03, *mp*,
05.	$\vdash P\Delta E$	A4 (axioma anselmiano),
06.	$P\Delta E \leftrightarrow \Delta Ey$	04, EΛ, $\vdash \Delta\Delta A \leftrightarrow \Delta A$ de S4, *re*,
07.	ΔEy	05, 06, *mp*,
08.	$\vdash Dy \rightarrow \mathrm{Ess}(D, y)$	T10*,
09.	$\mathrm{Ess}(D, y)$	02, 08, *mp*,
10.	$\Delta Ey =_d \Lambda\varphi(\mathrm{Ess}(\varphi, y) \rightarrow \Delta Vy\varphi y)$	D3,
11.	$\Lambda\varphi(\mathrm{Ess}(\varphi, y) \rightarrow \Delta Vy\varphi y)$	07, 10, *mp*,
12.	$\mathrm{Ess}(D, y) \rightarrow \Delta VyDy$	11, E Λ,
13.	$\Delta VxDy$	09, 12, *mp*,
14.	$\Delta VxDy$	02-13, EV

De 01-14, I→ resulta T12*, que reemplaza al segundo "axioma" de S. Anselmo $D \rightarrow \Delta D$.

T13*. $\vdash \Delta VxDx$.

01.	$\vdash VxDx \rightarrow \Delta VxDx$	T12,
02.	$\vdash \Delta(VxDx \rightarrow \Delta VxDx)$	01, *nec.*,
03.	$\vdash \Delta(VxDx \rightarrow \Delta VxDx) \rightarrow (\nabla VxDx \rightarrow \nabla\Delta VxDx)$	variante

[18] La idea para esta versión de T11 está tomada de FUHRMANN 2001, 9 (*Korollar zum zweiten Satz*).

		del teorema modal $\vdash \Delta(A \to B) \to (\nabla A \to \nabla B)$
04.	$\vdash \nabla \mathrm{V}xDx \to \nabla\Delta \mathrm{V}xDx$	02, 03, *mp*,
05.	$\vdash \nabla \mathrm{V}xDx$	T9*.
06.	$\vdash \nabla\Delta \mathrm{V}xDx$	04, 05 y mp.,
07.	$\vdash \nabla\Delta \mathrm{V}xDx \to \Delta \mathrm{V}xDx$	TS5 $\vdash \nabla\Delta A \to \Delta A$.

De 06, 07, *mp* obtenemos la prueba de la existencia necesaria de Dios.

§ 6. Semántica.

En el sistema S5 se deduce como teorema la llamada "ley de Becker" $\vdash \nabla\Delta A \to \Delta A$, una ley que es plenamente compatible con la definición gödeliana de "positividad" de los predicados, que lo son aquellos *moral y estéticamente valiosos independientemente de la estructura contingente del mundo*, lo que en una semántica de "mundos" equivale a decir "*en todo mundo (posible)*", que utilizaremos en la modelización de la demostración. Esta condición esencial de la caracterización goedeliana de las propiedades positivas describe lo que en la semántica sobre un conjunto M de mundos posibles se denomina una relación de accesibilidad entre mundos *R* reflexiva, simétrica y transitiva. En una estructura tal podemos caracterizar semánticamente a los enunciados 'necesarios' y 'posibles' de la siguiente manera:

Nec.: ΔA en un mundo m_0 cualquiera de M syss A es verdadero en todo mundo posible $m \in$ M (incluso en aquél m_0 en que se enuncia ΔA, pues la relación de accesibilidad es reflexiva, simétrica y transitiva).

Pos.: ∇A en un mundo m_0 cualquiera de M syss A es verdadero en al menos un mundo posible $m \in$ M.

Sea m_0 "nuestro mundo" y sea en él verdadero decir que es posible que Dios, el ser necesario, exista (es decir $\nabla\Delta \mathrm{V}xDx$). Entonces existe un mundo posible m_1 en el que, por la ley de Becker $\vdash \nabla\Delta A \to \Delta A$, es verdadero ΔA. Pero esto significa que todos los mundos accesibles a m_1, que son todos y entre los cuales por lo tanto está también el nuestro m_0, son tales que en ellos Dios existe. Pero en tal caso, puesto que todos los mundos son mutuamente accesibles, entonces en todos ellos es necesaria la existencia de Dios. Es decir, de la simple posibilidad de Dios en un mundo cualquiera se sigue la necesidad de Dios en ese mismo y en todo mundo. Esquemáticamente podemos ejemplificar lo anterior de la siguiente manera:

m_0	m_1	m_1 (si $m_1 \in$ M)	m_1 (si $m_1 \in$ M)$\wedge$($m_0 \in$ M)
$\nabla\Delta \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$	$\Delta \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$	$\mathrm{Vx}D\mathrm{x}$	$\Delta \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$

Por supuesto, si debilitamos la relación R de accesibilidad entre mundos, el teorema será semánticamente inválido. Si R fuera reflexiva y transitiva, pero no simétrica (es decir si cumpliera las condiciones semánticas para S4) entonces tendríamos el siguiente esquema:

m_0	m_1	m_1 (si $m_1 \in$ M'$\wedge$(M'$\neq$ M)$\wedge$($m_0 \notin$ M')
$\nabla\Delta \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$	$\Delta \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$	$\mathrm{Vx}D\mathrm{x}$
$\neg \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$		
$\neg\, \Delta \mathrm{Vx}D\mathrm{x}$		

Esto asegura que Dios es necesario en algún mundo accesible a m_0 y que existe en todos los m_1 accesibles a m_1, pero no permite deducir que entre esos m_1 se encuentre m_0: se puede dar el caso de que m_0 no sea uno de los m_1.

En el caso de la semántica diseñada por Gödel a través de su caracterización de las propiedades positivas, que son buenas caracterizaciones de las "perfecciones" absolutas, independientes del tiempo, la relación y ningún aspecto contingente del mundo, permite que nos refiramos a la *necesidad simpliciter*, incondicional, que es precisamente la que corresponde a la semántica de S5. Todas las otras formas de necesidad son más débiles y dependientes de esta, que es la necesidad metafísica por excelencia. Desde este punto de vista la semántica modal de S5, que verifica la prueba de Gödel es la única adecuada.

§ 7. Formas de la existencia.

Más arriba hemos visto los siguientes predicados de segundo orden de existencia:

$$\neg\nabla E < \neg E < \nabla E \wedge \nabla\neg E < \neg\neg E < E < \Delta\neg\neg E < \Delta E.$$

La lógica constructiva tal como se emplea en la deducción matemática, en la que la existencia coincide con la existencia necesaria, requiere distinguir sólo dos formas de existencia, $\neg\neg E$ y E, de acuerdo al modo en que conocemos los objetos matemáticos. En la matemática los teoremas de existencia fuerte E corresponden a objetos que se pueden construir efectivamente, como es el caso de la subsucesión ...0123456789... en el desarrollo decimal de π. En cambio los teoremas de existencia débil $\neg\neg E$ corresponden a objetos que no se pueden construir o para los que no se pueden encontrar algoritmos de construcción, pero para los cuales, sin embargo, se puede proceder de la siguiente manera: se supone su inexistencia y de esa hipótesis se deduce una contradicción inaceptable en la teoría. Entonces se concluye que no es el caso que no exista, aunque no se pueda "mostrar" el objeto. Tal cosa ocurre en teoremas famosos, como el de Bolzano-Weierstraß sobre la existencia de al menos un punto de acumulación en conjuntos infinitos de puntos en dominios acotados, o el de Brouwer sobre la existencia de al menos un punto fijo en funciones bicontinuas, etc. En general los teoremas matemáticos de existencia demostrados por *raa* son teoremas de existencia débil.

En dominios no-simbólicos parcialmente fenoménicos, como los de la física y de la ciencia empírica en general, podemos distinguir por un lado entre mera existencia contingente E, y por otro existencia necesaria. Ésta se especifica a su vez en "fuerte" ΔE, que es la que corresponde a enunciados deducidos de la teoría y que hablan de objetos, acontecimientos o procesos que se nos dan en el mundo de los fenómenos o son intuibles sensiblemente, y "débil" $\Delta\neg\neg E$, cuando, por deducción teórica, o de coherencia interna de una teoría física empíricamente bien corroborada, debemos predicar una existencia necesaria débil de los objetos mentados por esos "términos teóricos" que no se nos dan, o incluso no se nos pueden dar empíricamente.

Esto se puede trasladar analógicamente a lo "nouménico",[19] como acontece al menos parcialmente en la metafísica: una existencia fuerte ΔE correspondería allí a enunciados deducidos de la teoría que hablan de objetos, acontecimientos, procesos que se nos dan en el mundo de los fenómenos y para los que tenemos una percepción. En cambio, cuando deducimos la existencia de algo que no se nos da en el mundo de los fenómenos, entonces debemos predicar una existencia necesaria débil $\Delta\neg\neg E$. Para ello reemplazamos la definición D3 de más arriba por la siguiente de existencia necesaria débil:

---

[19] Cf. PLATÓN, *Politeia*, 508c y ss. Kant distingue entre un uso negativo y positivo del concepto de 'noúmenon' y rechaza este último (el dado en una intuición intelectual). Cf. KANT, *KrV* B 307 y 311.

D3'. $\Delta\neg\neg Ex =_d \Delta\neg\Lambda x\neg Ex =_d \Lambda\varphi(\mathrm{Ess}(\varphi, x) \rightarrow \Delta\neg\neg \mathrm{V}x\varphi x) =_d \Lambda\varphi(\mathrm{Ess}(\varphi, x) \rightarrow \Delta\neg\Lambda x\neg\varphi x$, que leemos '...existe necesariamente en sentido débil').

Por definición lo nouménico jamás se nos da en la percepción espacio-temporal. De ello no hay posibilidad de percepción, pero si se pudiese demostrar indirectamente la existencia de algo en ese dominio, entonces esa prueba de existencia sería necesaria débil $\Delta\neg\neg E$. Pero tal es precisamente el caso de las pruebas de la existencia de Dios, incluída la del argumento ontológico. Por lo tanto, bajo la hipótesis de que sean pruebas, serán obligatoriamente demostraciones de existencia débil. Y si no fuesen demostraciones, sino argumentaciones con fundamento insuficiente pero "bueno", es decir "dialécticas" muy persuasivas, entonces tendríamos el caso de creencias racionales 'CR' bien fundadas de existencia necesaria débil:
'CR $\neg\neg E$'.

Por analogía con la lógica constructiva tal como se emplea en la deducción matemática, distinguiremos entre esas dos formas de existencia necesaria La prueba ontológica demostraría entonces una existencia necesaria débil. Esto nos aconseja admitir una versión más débil del teorema T13*, a saber:

T13. $\vdash \Delta\neg\neg \mathrm{V}xDx$, o bien $\vdash \Delta\neg\Lambda x\neg Dx$,

es decir, que *necesariamente no es el caso de que todo no sea Dios.*

Ésta podría ser una demostración puramente racional de la existencia de quien por definición no podemos percibir en el espacio-tiempo. Otras argumentaciones sobre la existencia de Dios sólo parecen ser casos de creencias racionales (CR) más o menos bien fundadas de existencia débil:

CR $\neg\Lambda x\neg Dx$.[20]

8. Conclusión.

Existe una simetría interesante entre el argumento ontológico en la versión de Gödel por una parte y los fragmentos bien construídos de teoría matemática, como la aritmética de Peano, sus extensiones a gran

[20] Ciertamente un ateo podría presentar argumentos persuasivos sobre la no existencia de Dios, es decir: CR $\Lambda x\neg Dx$. La consideración de esos argumentos dialécticos nos muestra empero un más alto grado de persuasión por parte de los argumentos dialécticos afirmativos de su existencia, pero esto nos desplaza al problema de los grados de la persuasión, que no es un problema breve de abordar.

parte del análisis clásico, etc. Un teorema en todos esos dominios está suficientemente fundado, es epistéme en el sentido griego de saber suficientemente fundado en esos dominios simbólicos, pero en ellos la demostración de existencia puede ser necesaria fuerte o débil.

En cambio incluso la aplicación de teorías matemáticas a regiones de teoría física parcialmente fenoménica, salvo en los dominios de la protofísica (en la medida en que ella sea posible), ya está sólo insuficientemente fundada, pues depende de modelos hipotéticos acerca de cuál es la estructura espacio-temporal y material de cierta región del mundo físico.

Además en tales modelos gran parte de sus términos no son directamente empíricos, sino teóricos, en el mejor de los casos sólo accesibles mediante complejas mediaciones teóricas y muchas veces incluso no mediadas completamente, sino a través del formalismo. El saber físico es pues, en gran medida, sólo creencia racional, en el mejor de los casos sólo muy bien corroborada, pero además con importantes "aspectos nouménicos", como lo testimonian los inevitables términos teóricos. Hoy nos encontramos pues muy lejos de la idea kantiana de la física como ciencia perfectamente fundada por construcción sintética *a priori* en las formas de la intuición sensible.

¿Cuál es la situación teórica de la prueba de Gödel sobre el argumento ontológico? Por una parte podemos afirmar que es epistéme, es decir un saber suficientemente fundado en el ámbito del sistema modal S5. Además que tiene una semántica adecuada para sus definiciones de perfección, de Dios, de existencia necesaria, y para sus axiomas. Nos hemos preguntado si no habría otra semántica adecuada que no fuese la de S5 y que no verificase el teorema T13. En verdad parece no haberla.

Al intentar caracterizar qué es lo demuestra T13 nos encontramos con que lo primero que exigiría sería que todos los dialogantes racionales tienen de admitir la existencia necesaria de Dios, en razón de las reglas internas de la fundamentación necesaria dentro de un sistema simbólico que parece ser el único adecuado para el tratamiento del problema. De ese modo demostrar débilmente la existencia necesaria de Dios mediante un argumento ontológico significaría que la razón no puede concebir consistentemente su no existencia. O lo que es equivalente, que *Dios es una condición necesaria de la razón*. Esto parece más que afirmar el mero carácter lingüístico del filosofema. Algo semejante afirma por ejemplo Fitting en un libro reciente donde dice: "*Ontological arguments* *seek to establish the existence of God based on pure logic: the principles of reasoning require that God be part of ones ontology*".[21]

Pero ¿cuál sería su "empiria"?: *stricto sensu* ninguna.[22] *Lato sensu* consistiría por ejemplo de las restantes vías hacia Dios que parten de la consideración del mundo y en las que Dios es un término teórico metafísico nouménico, en tal sentido análogo a los términos teóricos de la física. Pero esas vías hacia Dios, como las de la física hacia los fragmentos de la estructura hipotética incognoscible del mundo físico, son a lo sumo creencias racionales (*pístis*) más o menos bien fundadas. Algo no muy distinto es lo que habría sostenido por ejemplo el Aquinate. El paso que nos falta es el que va de la razón dialógica necesaria a la realidad extradialógica. Este hiato parece insalvable: de Dios como condición necesaria de la razón a Dios *extra rationem*. Y este paso sólo lo pueden dar argumentos con fundamentos más débiles que, por muy convincentes que sean, como los de la mecánica relativista, no pueden alcanzar el carácter de prueba, sino sólo el de una buena *pístis*.

Sin embargo una peculiaridad de las pruebas del tipo ontológico es la inevitabilidad del predicado de existencia, de modo tal que un proceso de "epojé" o puesta entre paréntesis de la existencia como se practica en la fenomenología es imposible por inconsistente, como surge del siguiente desarrollo, siempre presente en él, sea como fundamento o sea, en nuestro caso, como corolario:

Por la definición D1 de Dios $D\mathrm{x} =_{d} \Lambda\varphi(P\varphi \leftrightarrow \Delta\varphi\mathrm{x})$, Dios equivale a la conjunción de todas las perfecciones:

(I) $D\mathrm{x} \leftrightarrow P_{1}\mathrm{x}\wedge\ldots\wedge P_{i}\mathrm{x}\wedge\Delta E\mathrm{x}\wedge P_{k}\mathrm{x}\wedge\ldots\wedge P_{n}\mathrm{x}\wedge\ldots\ldots$.

Ésta es aparentemente una equivalencia en la que no se presume la existencia del ser mentado en sus extremos. Sin embargo entre las perfecciones de la matriz de la expresión derecha está la de existencia necesaria '$\Delta E x$'. Y dado que la existencia necesaria está contenida en la matriz, podemos explicitar a ésta como prefijo mediante una cuantificación existencial necesaria débil (por el modo de conocimiento no intuitivo que tenemos de Dios) y obtener así la equivalencia:

(II) $\Delta\neg\neg\mathrm{V}\mathrm{x}D\mathrm{x} \leftrightarrow \Delta\neg\Lambda\mathrm{x}\neg D\mathrm{x} \leftrightarrow \Delta\neg\neg\mathrm{V}\mathrm{x}(P_{1}\mathrm{x}\wedge\ldots\wedge P_{i}\mathrm{x}\wedge\Delta E\mathrm{x}\wedge P_{k}\mathrm{x}\wedge\ldots$

[21] FITTING 2002, XI.

[22] *Stricto sensu* podría predicarse la forma fuerte de existencia necesaria en el caso de la experiencia mística en la que hay conocimiento intuitivo de la divinidad, si es que la aceptásemos, sea la de las religiones occidentales, sea la de metafísicas orientales.

$\wedge P_n x \wedge \ldots\ldots$).

Si ahora practicásemos una "epojé" de la existencia sobre los extremos de la equivalencia, volveríamos a obtener (I) y de allí regresaríamos a (II). Y eso volvería a ocurrir recursivamente toda vez que volviéramos a intentarlo. La estructura de esta argumentación recuerda en algo a la versión constructiva de la fórmula de Saccheri $\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A$, aunque es algo más compleja, pues tendría la forma siguiente "*Si ni suponemos que exista ni que no exista, entonces (por el contenido de su definición) necesariamente no es el caso que no exista. Luego necesariamente no el es caso que no exista*", lo que con una cierta simplificación en una lógica dóxico-epistémica podemos simbolizar así: $(\neg \mathbf{S} \mathrm{V} x D x \wedge \neg \mathbf{S} \neg \mathrm{V} x D x \rightarrow \Delta \neg\neg \mathrm{V} x D x) \rightarrow \Delta \neg\neg \mathrm{V} x D x$, donde 'S...' es el predicado dóxico-epistemido 'suponemos que ...'. De modo que la epojé de la existencia es imposible en el argumento ontológico. Esto no acontece en otros dominios teóricos: la geometría euclidiana era tradicionalmente la única geometría admitida, de tal modo que se tenía por cierto que también el mundo fenoménico tenía una métrica euclidiana, y por lo tanto lo demostrado en el espacio geométrico abstracto debía valer también en el concreto espacio de los fenómenos: el paso *extra rationem* parecía admisible. Sin embargo la epojé de la existencia era admisible aún en ese caso, pues el predicado de existencia no era parte integrante de la definición de ningún ente de la geometría. Luego de la aparición de las geometrías riemannianas con métricas no euclidianas el salto de lo ideal a lo real se hizo aún más problemático. Hoy la existencia de las entidades con métrica euclidiana sólo se puede asegurar idealmente de las entidades matemáticas de esa teoría, nunca con seguridad de las del mundo fenoménico, e incluso una epojé de la existencia se puede realizar coherentemente respecto de esos objetos ideales de la teoría en la medida en que no contengan la existencia como parte necesaria de su definición. En cambio este paso no se puede realizar coherentemente en el argumento ontológico, *porque su estructura impide esa auténtica epojé de la existencia.*

¿Cuál sería una condición inobjetable que permitiera dar el salto *extra rationem* del argumento ontológico a la "realidad nouménica"? Ello sería posible si fuera verdadera la tesis hegeliana de la identidad del "concepto" cuidadosamente desplegado y la "realidad", o, más popularmente, de que "todo lo real es racional", o bien el venerable fragmento

III del poema de Parménides: "lo mismo es pensar y ser".[23] Estas grandes tesis, aunque no podamos demostrarlas, parecen ser al menos *éndoxa* muy persuasivas.

CONICET; Universidad Nacional del Sur

Bibliografía.

ANDERSON 1990: ANDERSON, C. Anthony, "Some emendations of Gödel's ontological proof", *Faith and Philosophy* 7 (1990), 291-303.

BJØRDAL 1998: BJØRDAL, F.: "If some property is not Divine then God exists", texto mecanografiado 1998.

BULDT ET AL. 2001: BULDT ET AL.: *Kurt Gödel – Leben und Werk*, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 2001, 2 vols.

CURRY 1942: CURRY, Haskell Brooks: "The inconsistency of certain formal logics", *JSL* 7 (1942), 49-64.

EINSTEIN 1921: EINSTEIN, Albert: *Mein Weltbild*, Frankfurt/Mn.-Berlin: Ullstein, [24]1991 (ed. Carl Seelig). (El texto original apareció en *Geometrie und Erfahrung*, Berlin: Julius Springer, 1921.)

FITTING 2002: FITTING, Melvin: *Types, tableaux and Gödel's God*, Amsterdam, Kluwer Academic Publ., 2002.

FUHRMANN 2001: FUHRMANN, André: "'G' für Gödel. Kurt Gödels axiomatische Theologie", en SCHROEDER-HEISTER, P., SPOHN, W. y OLSSON, E.: *Logik in der Philosophie*, 2001, 1-25.

GILSON 1948: Gilson, Etienne: *L'Être et l'Essence*, Paris:,1948.

GODEL 1970: Gödel, Kurt, "Ontological proof", en GÖDEL 1995, especialmente 403-4.

GÖDEL 1995: Gödel, Kurt, *Collected Works*, vol. III, *Unpublished essays and lectures*, New York/Oxford: Oxford University Press, 1995, 388-437.

HARTSHORNE 1944: HARTSHORNE, Charles: "The formal validity and real significance of the ontological argument", *Philosophical Review* 53 (1944), 225-45.

HARTSHORNE 1962, HARTSHORNE, Charles: *The logic of perfection*, La Salle, Illinois: Open Court Publishing Co., 1962, esp. cap. II.

HARTSHORNE 1965: HARTSHORNE, *Charles:Anselm's discovery. A re-examination of the ontological proof for God's existence*, La Salle, Illinois: Open Court Publishing Co., 1965.

HAYEK 2001: HAYEK, P.: "Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes", en BULDT ET AL. 2001, vol. 2.

[23] ... tò gàr autò noeîn estín te kaì eînai.

KANT 1787: Kant, Immanuel, *Kritik der reinen Vernunft*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1975, ed. Wilhelm Weischedel.

LEIBNIZ 1686: *Discours de métaphysique*, 1686.

LEIBNIZ 1710: LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm: *Essais de théodicée sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal*, 1710.

LEIBNIZ 1714: LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm: *Monadologie*, 1714.

LORENZEN 1969: LORENZEN, Paul: Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, [2]1969.

MEINONG 1915: Meinong, Alexius: *Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit. Beiträge zur Gegenstandstheorie und Erkenntnistheorie*, Leipzig, 1915.

MORSCHER 1982: MORSCHER E.: „Ist Existenz immer noch kein Prädikat?", *Philosophia Naturalis* 19 (1982), 163-99.

SCHIMANOVICH-GALIDESCU 2001: SCHIMANOVICH-GALIDESCU, M.-E.: "Princeton-Wien 1946-1966. Briefe an die Mutter", en BULDT ET AL. 2001, vol 1.

SCHMIDT 1921: SCHMIDT, R.: *Die Deutsche Philosophie der Gegenwart in Selbstdarstellungen*, Leipzig, 1921.

SOBEL 1987: SOBEL, J. H.: "Gödel's ontological proof", en THOMPSON 1987, 241-61.

THOMPSON 1987: THOMPSON, J.J. (ed.): *On Being and Saying*, Cambridge (Mass.): M.I.T. Press, 1987.