TEXTOS

PRINCIPIOS METAFISICOS DE LAS MATEMATICAS

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

(Traducción de Roberto Torretti)

NOTA DEL TRADUCTOR: El manuscrito titulado *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, fue redactado por Leibniz después de la aparición del volumen de las *Acta eruditorum* correspondiente a 1714, a que hace referencia, y antes del 14 de noviembre de 1716, fecha de su muerte. Procede, pues, del período más tardío de su labor creadora, el mismo en que redacta los escritos dirigidos a Clarke. Aparentemente destinado a publicarse, permaneció inédito entre los manuscritos conservados en la Biblioteca Real de Hanover, hasta que Gerhardt lo incluyó en el tomo VII, pp. 17-29, de su edición de los escritos matemáticos de nuestro autor (G. W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Berlin y Halle 1849-63, 7 vols; abreviado GM). Su mayor interés reside, me parece, por una parte, en que nos muestra a Leibniz empeñado en definir con precisión, dos siglos antes que Bourbaki, los conceptos fundamentales de la matemática, que concibe como una ciencia mucho más general que la así llamada en su tiempo (restringida al estudio de la cantidad) y no vacila en arraigar en la ontología; por otra parte, en que estas tareas de depuración conceptual se ejecutan, ostensiblemente, a la luz de representaciones previas, preconceptuales, que Leibniz presupone en sus lectores, y que implícita pero indisimuladamente orientan sus definiciones y legitiman sus demostraciones. Tales representaciones preconceptuales constituyen el paradigma de lo que Kant llamará *intuición pura*, subrayando su carácter no solamente prelógi-

co, sino alógico, irreductible a conceptos. Vemos a Leibniz, en cambio, ajeno a toda concepción de abismos insalvables en el seno del espíritu, moverse confiadamente de la intuición al verbo, de las representaciones que todos poseemos aunque no las sepamos explicar, a su exacta e inequívoca caracterización discursiva.

Conozco tres traducciones del texto latino de Leibniz a lenguas modernas: una alemana de A. Buchenau, revisada y anotada por Ernst Cassirer (G. W. Leibniz, *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, Hamburg, Felix Meiner, 1966, vol. I, pp. 53-68; en adelante, llamo a esta edición *Hauptschriften*), y dos inglesas, de Leroy E. Loemker (G. W. Leibniz, *Philosophical Papers and Letters*, Chicago, University of Chicago Press, 1956, vol. II, pp. 1082-1094, citado: Loemker) y de Philip P. Wiener (Leibniz, *Selections*, New York, Scribner's, 1951, pp. 201-216). Las tres son incompletas, y omiten aproximadamente los mismos pasajes. Las de Buchenau y Loemker son excelentes y me han sido muy útiles, aunque me he esforzado, en la medida de mis posibilidades, por ofrecer una traducción más estrictamente literal que las suyas. La de Wiener, en cambio, me parece un cúmulo de arbitrariedades; no la mencionaría siquiera si no apareciese en un volumen muy difundido, atractivo por su índice y su bajo precio. Intercalo entre corchetes números que indican el comienzo de las páginas de la edición de Gerhardt; palabras latinas, tomadas del original, especialmente en los pasajes en que se fija la terminología; y expresiones españolas, que no corresponden exactamente a ninguna del original, pero ayudan a aclarar su sentido. En particular las palabras *entes* y *objetos* se intercalan, indistintamente, donde Leibniz usa el neutro plural. Todas las notas son mías; en algunas, debidamente señaladas, no hago sino parafrasear notas de Cassirer a la traducción de Buchenau. Conviene quizás indicar aquí que *lugar* (*locus*) significa a menudo lo que llamamos *lugar geométrico*; sobre este concepto, véase el texto de Descartes citado en la nota 19.

Como el distinguido matemático Christian Wolff se ha referido recientemente, en su Curso latino de Matemáticas, a ciertas reflexiones mías sobre el análisis de los axiomas y la naturaleza de la semejanza, explicándolas a su modo (véase *Acta eruditorum*, año 1714),[1] he juzgada oportuno publicar, para que no se pierdan, algunas ideas relacionadas con ello, concebidas por mí hace tiempo, que permiten entender que existe un arte analítica más vasta que la

[1] Leibniz se refiere a una reseña anónima de la obra de Wolff *Elementa Matheseos universae*, vol. I, Halle 1713. En esa reseña se señala que Wolff utiliza la definición leibniziana de semejanza y su demostración del principio de que el todo es mayor que cada una de sus partes. Debo estas informaciones a Loemker, p. 1205.

matemática, a la cual esta ciencia toma prestados sus métodos más bellos. Creo conveniente, por lo tanto, empezar a un nivel un poco más profundo.[2]

[18] *Si se postula que existen varios estados de cosas que no envuelven nada opuesto, se dice que existen simultáneamente* [*simul*]. Así, negamos que sean simultáneos lo ocurrido el año pasado y lo ocurrido este año, pues envuelven estados opuestos de la misma cosa. *Si uno de dos estados no simultáneos envuelve la razón del otro, aquél se considera anterior, éste posterior.* Mi estado anterior envuelve la razón de que exista el posterior. Y como mi estado anterior, debido a la conexión de todas las cosas, envuelve también el estado anterior de las otras cosas, mi estado anterior envuelve asimismo la razón del estado posterior de las otras cosas, y por lo tanto es anterior a ese estado de ellas. *Y por esto, cada existente es simultáneo con, o anterior o posterior a otro existente. El tiempo es el orden de existir de los que no son simultáneos.* Y por esto es el orden general de los cambios [*mutationes*], en que no se tienen en cuenta las [diversas] especies de cambios.

La duración es la magnitud del tiempo. Si la magnitud del tiempo disminuye continuamente de modo uniforme, el tiempo desaparece *en el momento*, cuya magnitud es nula.

El *espacio es el orden de coexistir*, esto es, el orden de existir de los [entes] simultáneos.

[Los entes] se juzgán más próximos o más remotos en ambos órdenes (del tiempo y del espacio), según se requieran más o menos [entes adicionales] para captar el orden entre ellos.[3] Por esto,

---

[2] Leibniz escribe "Paulo ergo altius ordiri placet", frase compuesta de palabras corrientes que significan, más o menos, lo mismo que las que he usado en mi traducción (en vez de "más profundo", pude haber dicho también "más elevado", ya que *altius* significa cualquiera de las dos cosas). No entiendo de dónde sacan Wiener y Loemker las equivalencias inglesas que proponen para este sencillo pasaje: "...this art, which I must take up again and discuss somewhat more extensively than Wolff" (Wiener, p. 201); "to do this I shall have to introduce a somewhat higher order of principles" (Loemker, p. 1083). La traducción de Loemker, es verdad, refleja una adivinación inteligente, y no desfigura gravemente el sentido del texto original; pero cualquier diccionario le habría dicho que *ordiri*, infinito de *ordior*, sólo etimológicamente se emparenta con *order*, y significa lisa y llanamente *empezar*.

[3] Traduzco siguiendo el original, pero parece claro que Leibniz quiere decir que el par cuyo orden puede captarse apelando a *menos* entes inter-

dos puntos son más próximos si los [entes] interpuestos, máximamente determinados por ellos, constituyen algo más simple. Tal [objeto] interpuesto,[4] máximamente determinado, es el camino más simple de uno al otro, a la vez mínimo y máximamente uniforme, a saber, la recta, que es más corta [*minor*] cuando se interpone entre puntos más próximos.

La extensión es la magnitud del espacio. Erradamente se confunde de ordinario la extensión con lo extenso, y se la considera como si fuese una sustancia.[5]

Si la magnitud del espacio disminuye continuamente de modo uniforme, desaparece en el punto, cuya magnitud es nula.

La posición es un modo de la coexistencia.[6] Por esto, no sólo envuelve cantidad, sino también cualidad.

La cantidad o magnitud es aquello que puede conocerse en las cosas por su mera compresencia (o percepción simultánea). Así no puede conocerse qué es un pie o un codo si no tenemos actualmente algo a modo de medida, que pueda luego aplicarse a otros [objetos]. Y no se puede explicar satisfactoriamente el pie con ninguna definición [19] que no envuelva a su vez algo así. Pues si decimos que un pie son doce pulgadas, se suscita la misma cuestión con respecto a la pulgada, y no ganamos con ello una luz mayor; y no es posible determinar si la noción de pulgada o la de pie es anterior por naturaleza, pues depende de nuestro arbitrio tomar como base a la una o a la otra.

La cualidad, empero, es aquello que puede conocerse en las cosas cuando se las observa en su singularidad [*singulatim*], sin que

---

medios se juzgará más *próximo*; más *remoto* en cambio aquel cuyo orden sólo puede captarse apelando a *más*.

[4] Parece haber una vacilación en el original: en la oración anterior se habla, en plural, de *interposita maxime determinata* por los dos puntos; en ésta, se habla, en singular, de *interpositum maxime determinatum*. Aquí Leibniz explica que se trata de la recta que ambos puntos unívocamente determinan; pareciera que en la oración anterior se trataba de los puntos situados, entre los dos puntos dados, sobre esa recta. Si concebimos la recta como un conjunto de puntos, las ideas resultan equivalentes.

[5] Leibniz alude a los cartesianos.

[6] *Situs est coexistentiae modus.* Sería más natural, quizá, traducir "la posición es una modalidad de la coexistencia" (esto es, uno de los aspectos bajo los cuales la coexistencia es determinable); pero *modalidad* es un término técnico de la filosofía que no conviene echar al trajín. Por otra parte, *modo*, en una acepción afín a la presente, es un término familiar a los lectores de las traducciones españolas de Descartes y Spinoza.

haga falta la compresencia. Tales son los atributos que se explican en la definición o por las diversas determinaciones [*modificationes*] que envuelven.[6b]

Iguales son [entes] de la misma cantidad.

Semejantes son [entes] de la misma cualidad. Por lo tanto, si dos [entes] semejantes son desiguales [*diversa*] sólo pueden distinguirse por compresencia.

Es evidente en virtud de esto, por ejemplo, que dos triángulos equiángulos tienen lados proporcionales y viceversa. Pues si los lados son proporcionales, los triángulos son necesariamente semejantes, ya que se los determina de modo semejante. Además, en todo triángulo la suma de los ángulos es la misma, ya que es igual a dos rectos; por lo tanto, es necesario que la razón entre los ángulos homólogos y dicha suma sea la misma en un triángulo que en el otro; de otra suerte, uno de ellos podría distinguirse del otro por esto mismo, vale decir, de por sí, o considerado en su singularidad. Así se demuestra fácilmente lo que de otro modo [sólo se establece] con muchos rodeos.

Homogéneos son [entes] respectivamente iguales a otros semejantes entre ellos. Sean A y B tales que podamos suponer L igual a A, y M igual a B, donde L y M son semejantes; entonces llamamos homogéneos a A y B.

Por esto suelo decir que son homogéneos los [entes] que pueden hacerse semejantes por una transformación, como una curva y una recta. Pues si A se transforma en L que es igual a A, puede hacerse semejante a B o a M, en la cual suponemos que se transforma B.

Decimos que algo está en [*inesse*] un lugar o es *ingrediente* de algo, si dado esto se entiende inmediatamente que por eso mismo está dado aquello, sin que haya que recurrir a inferencias. Así, cuando postulamos una línea finita, postulamos sus extremos y sus partes.[7]

[6b] Ernst Cassirer hace una interesante observación con respecto a este pasaje: a la luz de los conceptos de cantidad y cualidad aquí propuestos, resulta que las "formas" y las leyes universales de las matemáticas, que se dejan establecer con pleno rigor conceptual, presuponen relaciones generales de carácter *cualitativo*, mientras que la magnitud *absoluta* de un objeto particular (que es lo que aquí se entiende por *cantidad*) sólo puede captarse por su presencia sensible inmediata. (*Hauptschriften*, I, 55, n. 33).

[7] El texto trae: "Ejus extrema ponimus ejus partes". Loemker traduce: "We also posit its end points as belonging to it". Buchenwald traduce análogamente al alemán. Pero esto supone entender que para Leibniz los puntos

Lo que está en algo homogéneo [con ello] se llama *parte*, y aquello en que está se llama *todo*. En otras palabras, parte es un ingrediente homogéneo.

Límite común [*terminus communis*] es aquello que está en dos [entes] que no tienen una parte común. Si se entiende que son partes del mismo todo, su límite común se llama un *corte* [*sectio*] del todo.

Es obvio, pues, que el límite no es homogéneo con lo limitado por él, ni el corte con lo cortado.

[20] El tiempo y el momento, el espacio y el punto, el límite y lo limitado, aunque no son homogéneos, son sin embargo *homógonos*, por cuanto el uno puede desaparecer en el otro en virtud de un cambio continuo.

Entendemos que el lugar que se dice *está en* otro lugar es homógono con éste; si es parte suya o igual a una parte no sólo será homógono sino además homogéneo. Aunque el ángulo está sobre un punto [*ad punctum*],[8] no está en él; de otro modo, se concebiría en el punto una magnitud.

Si una parte de una cosa es igual al todo de otra, aquélla se llama *menor*, ésta *mayor*.

Así, *el todo es mayor que la parte*. Sea A el todo, B la parte; digo que A es mayor que B, por cuanto una parte de A (a saber, B) es igual a todo B. La cosa puede presentarse también mediante un silogismo, cuya mayor es una definición y cuya menor es una proposición idéntica:

> Lo que es igual a una parte de A es menor que A (por definición);
> B es igual a una parte de A, a saber, B mismo (por hipótesis);
> por lo tanto, B es menor que A.

Vemos aquí que las demostraciones finalmente se resuelven en dos [clases de] indemostrables: definiciones o ideas y proposiciones primitivas, que son idénticas, como en este caso 'B es B' o 'cada cosa es igual a sí misma', e infinitas otras por el estilo.

---

en que la línea termina son partes suyas, suposición contradicha, sin ir más lejos, por los dos párrafos siguientes. He preferido por esto traducir como si el texto dijese "ejusque partes" —no es inverosímil que el "que" ("y") se le quedase a Leibniz en el tintero. El texto diría, entonces, que partes y extremos son los ingredientes de la línea.

[8] Entiéndase: su vértice. La traducción es inevitablemente forzada, pues en español hablamos de construir un ángulo *en* un punto. Loemker traduce *at a point*; Buchenwald, *an einem Punkt*.

Movimiento es cambio de posición.

Se mueve aquello en que hay [*in quo est*] un cambio de posición y hay a la vez una razón del cambio.

El móvil es homógono a lo extenso, pues hasta el punto se concibe como móvil.

El *trayecto* [*via*] es el lugar continuo sucesivo de una cosa móvil.

La huella [*vestigium*] es el lugar que la cosa móvil ocupa en un momento dado. Por esto la huella del límite es un corte del trayecto que el límite recorre, si damos por supuesto que el móvil no camina por sus huellas.

Se dice que *el móvil camina por sus huellas* si cada punto suyo distinto de su límite sucede continuamente en su lugar a otro punto del mismo móvil.

Si postulamos que el móvil no se mueve de esta manera, entonces una *línea* es el trayecto de un punto.

Una *superficie* es el trayecto de una línea.

[21] Un *volumen* [*amplum*] o espacio, o como se dice vulgarmente, un sólido es el trayecto de una superficie.

Las magnitudes de los trayectos por los que un punto describe una línea, una línea una superficie, una superficie un volumen, se llaman *longitud, anchura* y *profundidad*. Se llaman dimensiones y en la geometría se muestra que no hay más que tres.

Tiene anchura lo que tiene un corte extenso o es limitado por algo extenso.

Tiene profundidad lo que no limita algo extenso ni puede ser un corte de algo extenso; en lo profundo hay pues algo más que lo que puede ser límite.

La línea es lo último que siendo extenso, limita.

El volumen es lo último que, siendo extenso, es limitado.[9]

La semejanza o desemejanza en un volumen o espacio se conoce por la consideración de los límites; por esto, como el *volumen* es algo más que lo que puede ser límite, internamente es por doquier semejante. Volúmenes cuyos confines totales [*omnimodae extremitates*] coinciden, son congruentes o se asemejan, son [volúmenes] coincidentes, congruentes o semejantes.[9b] Lo mismo ocurre en el

---

[9] *Linea est ultimum terminans extensum. Amplum est ultimum terminatum extensum.*

[9b] *Coinciden* dos objetos idénticos que sólo difieren en la denominación, como el trayecto de A a B y el trayecto de B a A; *son congruentes* dos ob-

plano, que es una superficie internamente uniforme o semejante a sí misma, y en la *recta* que es una línea internamente semejante a sí misma.

El *confín total* de los [entes] extensos que poseen anchura puede llamarse *ámbito*. Así el ámbito del círculo es la circunferencia; el ámbito de la esfera es la superficie esférica.

El *punto* (del espacio) es el lugar más simple, o lugar de ningún otro lugar.

El *espacio absoluto* es el lugar más lleno, o lugar de todos los lugares.

De un punto nada prosulta.[10]

De dos puntos prosulta algo nuevo, a saber, cada punto único en su posición respecto a aquéllos,[11] y el lugar de todos esos puntos, esto es, la *recta* que pasa por los dos puntos indicados.[12]

De tres puntos prosulta un *plano*, esto es, el lugar de todos los puntos únicos en su posición respecto a tres puntos no situados en una misma recta.[13]

De cuatro puntos que no están situados sobre el mismo plano prosulta el *espacio absoluto*. Pues cualquier punto es único en su posición respecto a cuatro puntos no situados en un mismo plano.

Uso el vocablo *prosultar* para indicar una idea nueva, cuando al presuponer ciertos [objetos] se determina algún otro en virtud de que [22] éste es único en su relación con aquéllos. Se entiende que en el presente caso la relación [considerada] es la posición.

---

jetos que difieren a lo sumo por sus relaciones con objetos externos. Leibniz da estas definiciones en un escrito reproducido en GM, VII, 29. Obsérvese que de acuerdo con la segunda, las célebres *contrapartidas incongruentes* de Kant no son tales, pues son congruentes. La definición de objetos semejantes se dio arriba.

[10] Leibniz usa en latín el neologismo *prosultare*, que explica unas líneas más abajo. La peculiaridad e importancia del concepto que quiere expresar con él, justifica la adopción de un neologismo similar en castellano, al menos en este contexto.

[11] *Punctum quidvis sui ad ea situs unicum.*

[12] Dados dos puntos A, B hay una sola recta *m* que pasa por ellos. Cada punto P sobre esa recta está unívocamente determinado por su distancia a A y a B; en cambio, dado un punto Q fuera de esa recta, hay infinitos otros puntos que distan de A y B lo mismo que dista Q, a saber, todos los puntos de la circunferencia cuyo radio es la distancia de Q a *m* y cuyo centro es la proyección perpendicular de Q sobre *m*.

[13] La redacción de Leibniz es un poco descuidada. Debe entenderse que los tres puntos de que se habla al principio del párrafo no son colineales.

El tiempo puede continuar hasta el infinito. En efecto, como un todo el tiempo es semejante a cualquier parte suya, estará con otro tiempo en la misma relación en que la parte está con él, y así se concebirá que continúa en otro tiempo mayor.

Análogamente, *el espacio sólido o volumen puede continuar hasta el infinito*, por cuanto cualquier parte suya puede suponerse semejante al todo. Y por esto también el plano y la recta continúan hasta el infinito. Del mismo modo se muestra que el espacio, como la recta, y asimismo el tiempo, y en general lo continuo pueden subdividirse hasta el infinito. Pues en la recta y en el tiempo, la parte es semejante al todo y, por lo tanto, puede dividirse en la misma proporción que éste. Aunque hay [objetos] extensos cuyas partes no son semejantes al todo, es posible sin embargo transformarlos en otros que tienen esta propiedad y dividirlos en la misma proporción en que se dividen esos [objetos] en que se transforman.

De esto se desprende además que dado un movimiento cualquiera se puede postular otro más rápido o más lento que él, en una proporción dada; pues si un rayo rígido gira en torno a su origen,[14] los movimientos de sus puntos son proporcionales a las respectivas distancias del origen, y así las velocidades pueden variar como las rectas.

La *estimación* de las magnitudes es de dos clases: imperfecta y perfecta. Es imperfecta, cuando decimos que algo es mayor o menor que otra cosa, aunque no sean homogéneos ni guarden proporción entre ellos; como si alguien dijese que la línea es mayor que el punto, o la superficie que la línea. En este sentido Euclides ha dicho que el ángulo de contacto[15] es menor que cualquier ángulo rectilíneo, aunque en realidad no cabe ninguna comparación entre estos [objetos] completamente diversos, que ni son homogéneos ni pueden transformarse el uno en el otro por un cambio continuo. En las estimaciones perfectas entre homogéneos se cumple la regla de que al ir de modo continuo de un extremo al otro se pasa por todos los [objetos] intermedios; pero ella no se cumple en las imperfectas, pues lo que se llama intermedio es heterogéneo, y así al ir de modo continuo de un ángulo agudo dado a un ángulo recto no se pasa por el ángulo que forma el diámetro o el radio con la circunferencia,

---

[14] *Radio enim rigido circa centrum acto.* Entiendo que el *centrum* de que se habla es el centro del círculo generado por el movimiento del rayo (*radius*), o sea el extremo u origen de éste.

[15] Esto es, el ángulo formado entre una curva y una tangente suya.

aunque se diga que éste es menor que un ángulo recto y mayor que cualquier ángulo agudo; pues aquí se entiende 'menor'[16] impropiamente como aquello que está comprendido dentro de otro.

Hay muchas relaciones cuantitativas [*secundum quantitatem*]. Así, dos rectas pueden tener entre ellas la relación consistente en que la suma de ambas sea igual a una recta fija. Y puede haber infinitos pares de rectas [23] que tienen esta relación entre ellas, digamos x e y, tales que $x + y = a$; si, por ejemplo, a es como 10, x e y pueden ser como 1 y 9, como 2 y 8, como 3 y 7, como 4 y 6, como 5 y 5, como 6 y 4, como 7 y 3, como 8 y 2, como 9 y 1. Pero pueden hallarse también infinitas fracciones menores que 10 que satisfacen [la ecuación]. Así también hay una relación entre dos rectas x e y, tal que la suma de sus cuadrados sea igual al cuadrado dado de una recta a, de modo que $x^2 + y^2 = a^2$; y pueden hallarse infinitos pares de estas rectas, y esta es la relación que hay en el círculo entre el seno de un ángulo y el de su complementario, y viceversa: si uno es x, el otro es y, siendo el radio a. Y cabe concebir [*fingi*] infinitas relaciones tales, tantas cuantas especies de líneas cabe trazar en el plano: si las x son las abscisas sobre un eje recto,[17] las y serán las ordenadas paralelas entre sí, levantadas desde las abscisas[18] y que terminan en una línea.

Pero la más simple de todas las relaciones es la llamada *razón* o *proporción*, que es la relación de dos cantidades homogéneas, surgida de ellas solas, sin postular un tercer [objeto] homogéneo. Por ejemplo, si y es a x como un número es a la unidad, esto es, si $y = nx$; en cuyo caso, si las x son las abscisas, las y las ordenadas, el lugar es una recta — digo, el lugar, esto es, la línea en que terminan las ordenadas. Esto hace evidente también que, si hubiese una ecuación local[19] de cualquier grado, como $lx^3 + my^3 + nx^2y +$

---

[16] El original trae *majus* (*mayor*); pero el *lapsus* es evidente (*majus enim hic sumitur improprie pro eo quod intra alterum cadit*).

[17] Leibniz escribe *abscissae ex recta directrice*, que literalmente significa *abscisas desde una recta orientadora*; visiblemente concibe las x como distancias *desde* un eje, *abscissae*, vale decir *separadas* de él. He preferido adaptar la traducción a los hábitos mentales contemporáneos. (Buchenwald y Loemker van aún más lejos que yo en esta dirección, poniendo en boca de Leibniz la indicación de que el eje de las abscisas ha de ser *horizontal*).

[18] *Ad abscissas applicatae*, literalmente, *aplicadas sobre las abscisas*.

[19] *Equatio localis*, esto es, una ecuación que determine el lugar geométrico. Cf. Descartes, *La Geométrie*, edición de 1637, pp. 334-335: "Ces lieux ne sont autre chose, sinon que lors qu'il est question de trouver quelque point auquel il manque une condition pour être entierement determiné..., tous

$pxy^2 = 0$, donde l, m, n, p son números puros, el lugar a que se aplica la ecuación ha de ser una recta y estará dada la proporción entre x e y. Sean dadas dos rectas que se comparen de cualquier modo. Por ejemplo, que se sustraiga la menor de la mayor cuantas veces se pueda, y luego el residuo de la menor, y nuevamente el residuo de aquello que cuantas veces se podía se sustrajo, hasta que [el minuendo] se agote, en el caso de que las cantidades sean conmensurables, [caso] en que el último sustraendo constituye la medida común; o hasta que se tenga una ley de la progresión infinita, si ellas son inconmensurables. La serie de los números cocientes será la misma, si la proporción es la misma. Pues si a es a b como

$$1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}$$ es a la unidad, entonces l, m, n, p, etc.,

será la serie de los números cocientes. Por ejemplo, si a es 17 y b es 5, la serie constará sólo de los tres términos l, m, n, que serán los números 3, 2, 2, respectivamente. Si a y b son partes de una recta dividida en media y extrema razón,[20] entonces [24] si a es mayor y b menor, a será a b como $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}$ es a la unidad; los cocientes serán unidades y la serie de ellos irá hasta el infinito. Si a y b son rectas cualesquiera entre las que hay la misma proporción que entre $\frac{l}{1} + \frac{m}{2} + \frac{n}{4} + \frac{p}{8} + \frac{q}{16} + \text{etc.}$, y la unidad, si suponemos que l, m, n, p, q, etc. son iguales a cero o a uno, la serie termina o es periódica, pues los números son conmensurables.

---

les points d'une même ligne peuvent être pris pour celui qui est demandé... Et toutes fois et quantes que cela est, on peut venir a une equation qui contient deux quantités inconnues..."

[20] Un punto divide un segmento recto en media y extrema razón si lo corta en dos partes, la mayor de las cuales es media proporcional entre el segmento entero y la otra (Euclides, *Elementos*, VI, Def. 2).

De esto se desprende que las líneas son semejantes en proporción a las rectas homólogas, las superficies en proporción a los cuadrados de rectas homólogas y los sólidos en proporción a los cubos. Sean dos [objetos] extensos semejantes A y L, y sean B y M homólogos homogéneos. Puesto que A con B (que simbolizamos A;B) es semejante a L con M (o sea L;M), la proporción de A a B será idéntica a la de L a M; si no fuera así, A;L podría distinguirse de B;M de otro modo que por compresencia; y entonces se presentarían otros números para expresar la proporción. Por lo tanto, obtendremos, permutando, que A es a L como B es a M, según afirmábamos. Así se demuestra que los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros; las esferas como los cubos de sus diámetros. Sean los círculos (esferas) A y L; los cuadrados homólogos (cubos homólogos) B y M.

Queda pues de manifiesto que el *número*, en general, sea entero, quebrado, racional, irracional, ordinal[21] o trascendente, puede definirse con un concepto general, como aquello que es homogéneo a la unidad, o que se relaciona con la unidad como una recta con una recta.[22] Es obvio además que si la razón de a a b se considera como un número que es a la unidad como la recta a es a la recta b, la razón misma será homogénea a la unidad; la unidad, por otra parte, representa la razón de la igualdad.

Conviene advertir, además, que toda el álgebra [*doctrina algebraica*] es una aplicación a las cantidades, del arte combinatoria o doctrina de las formas abstractas, que es la característica universal y pertenece a la metafísica. Así el producto de la multiplicación de $a + b + c +$ etc. por $l + m + n +$ etc. no es otra cosa que la suma de todas las combinaciones binarias [*omnium binionum*] de letras tomadas una de cada serie, y el producto de tres series multiplicadas entre sí, $a+b+c+$ etc. por $l+m+n+$ etc. por $s+t+v+$ etc. será la suma de todas las combinaciones ternarias [*ternionum*] de letras tomadas una de cada serie; y de otras operaciones resultarán otras fórmulas. De ahí que en el cálculo sea útil observar no sólo la ley de los homogéneos, sino también la ley de la justicia, [25] de modo que las relaciones establecidas en los datos o hipótesis se preserven en los resultados buscados o derivados, y donde sea viable, también en el curso de las operaciones; debiendo esti-

---

[21] Leo *ordinalem*, en vez de *ordinalium*.

[22] Debemos entender que la relación concierne a las magnitudes de las rectas (mejor dicho, segmentos rectos) en cuestión.

marse en general que cuando los datos siguen un cierto orden, también los resultados se ajustan a ese orden.[23] De aquí se desprende la *ley de la continuidad*, proclamada por mí antes que nadie, en virtud de la cual la ley de los [objetos] en reposo es como un caso especial de la ley de los que están en movimiento, la ley de los iguales como un caso especial de la ley de los desiguales, la ley de las curvas como un caso especial de la ley de las rectas; lo que se cumple cada vez que un género acaba [*desinit*] en la cuasi-especie opuesta.[24] Y a este contexto pertenece ese razonamiento que los géometras admiran desde antaño, por el cual, a partir de la hipótesis de que algo es, se prueba directamente[25] que no es, o viceversa;

---

[23] La traducción de este pasaje es menos literal y más perifrástica que lo acostumbrado. El texto latino dice así: *Hinc in calculo non tantum lex homogeneorum, sed et justitiae utiliter observantur, ut quae eodem modo se habent in datis vel assumtis, etiam eodem modo se habeant in quaesitis vel provenientibus, et qua commode licet inter operandum eodem modo tractentur; et generaliter judicandum est, datis ordinate procedentibus etiam quaesita procedere ordinate.* Sobre este pasaje observa Cassirer lo siguiente: *La lex justitiae* o *ley de correspondencia* se observa en una expresión algebraica cuando ésta ha sido construida en forma perfectamente simétrica en torno a varias variables; para tales expresiones Leibniz introdujo una manera abreviada de escribirlas y un algoritmo específico; así, la expresión $x^3 + y^3 + z^3 + 2x^2y + 2x^2z + 2xy^2 + 2xz^2 + 2y^2z + 2yz^2 + 5xyz$ se escribiría abreviadamente $x^3 + 2x^2y + 5xyz$ donde x^3 representa todos los cubos, x^2y todos los productos de una variable por el cuadrado de una de las otras dos, etc.; esta representación simbólica permite expresar relaciones de gran generalidad en una fórmula única; así por ejemplo el valor del cubo de una suma de cualquier número de términos se expresa mediante la fórmula $x^3 + 3x^2y + 6xyz$; cf. GM, VII, 66 (*Hauptschriften*, I, 63, n. 40).

[24] Entiéndase: cada vez que la variedad de especies de un género se puede ordenar en una serie cuyos miembros difieren cada vez menos del género opuesto, el cual puede en este sentido tratarse como caso especial o cuasi-especie del mismo género, el elemento último o límite de la serie de sus especies.

[25] *Directe*, escribe Leibniz, adverbio que sorprende un poco aquí, donde se describe la forma de prueba comúnmente llamada *indirecta* (o apagógica). No es fácil comprender la conexión entre esta forma de prueba y el principio de continuidad. Cassirer la ilustra con el siguiente ejemplo: Para mostrar que las superficies de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros, demostraban primero los antiguos que esta relación vale para polígonos regulares inscritos en esos círculos; pero su validez en el caso límite que representan los propios círculos no se probaba directa, sino apagógicamente, mostrando que la hipótesis de una proporción diferente lleva a contradicciones; cf. Euclides, xii, 2 (*Haupschriften* I, 98, n. 72).

o se establece que es opuesto o incompatible, lo que se supone inicialmente que es una especie [del género en cuestión]. Este es el privilegio de lo continuo; la continuidad, en efecto, se halla en el tiempo, la extensión, las cualidades, los movimientos, y en todo tránsito de la naturaleza, que jamás ocurre a saltos.

La posición [*situs*] es una cierta relación de coexistencia entre muchos [entes], que se conoce a través de otros coexistentes intermedios, esto es, tales que tienen con los primeros una relación de coexistencia más simple.

Pero no sólo conocemos que coexisten aquellos [entes] que se perciben simultáneamente, sino también aquellos que percibimos en sucesión, con tal que se postule que durante el tránsito de la percepción del uno a la percepción del otro el primero no perece, ni nace el segundo. De aquella hipótesis se sigue que ambos coexisten al tiempo en que alcanzamos el segundo; de ésta, que ambos existían ya cuando considerábamos el primero.[26]

Hay asimismo un cierto orden en el tránsito de las percepciones, mientras se pasa de un [objeto] a otro a través de otros. Y esto puede llamarse *trayecto* [*via*]. Pero como este orden puede variar de infinitos modos es necesario que haya uno máximamente simple, que consista en proceder, según la naturaleza misma de la cosa, a través de determinados intermediarios, a saber, aquellos que se relacionan con cada extremo de la manera más simple. (Si no fuese así, no habría orden, ni razón para discernir en la coexistencia de las cosas, pudiéndose ir de un [objeto] dado a otro a través de cualquiera). Este es el trayecto mínimo de uno al otro, cuya magnitud se llama *distancia*.

Para que esto se entienda mejor, prescindiremos ahora de todo lo que pueda observarse en los [objetos] singulares de cuya distancia se trata, considerándolos como si en ellos no hubiese ninguna variedad que observar, o sea, considerándolos como puntos. En efecto, [26] un *punto* es algo en que no se supone que haya nada más coexistente con ello, de modo que lo que está en ello es ello mismo.

Así, el trayecto de un punto será una *línea*, que carecerá absolutamente de *anchura*, pues un corte suyo, que consiste en un punto, no tiene longitud.

Con un punto dado no se determina nada fuera de él. Pero dados

---

[26] *Aquella hipótesis*, a saber, que el primer objeto no perece durante el tránsito de la percepción del uno al otro; *ésta*, vale decir, que el segundo objeto no nace durante ese tránsito.

dos puntos se determina el trayecto más simple de uno a otro, que llamamos *recta*.

(1) De esto se sigue, *primero*, que la recta es el mínimo de punto a punto, o sea que su magnitud es la distancia entre los puntos.

(2) *Segundo*, que la recta es uniforme [*aequabilis*] entre sus extremos; pues no se ha supuesto nada que pudiera dar razón de la variedad.

(3) Resulta asimismo que una posición de un punto que se mueve en ella no puede discernirse de otra si se omite la consideración de los extremos. Por esto también cada parte de una recta es una recta e internamente es por doquier semejante a sí misma, y dos partes suyas no pueden distinguirse si no pueden distinguirse sus extremos respectivos.

(4) Se sigue además, que si se postulan extremos semejantes, o congruentes, o coincidentes, las partes mismas serán semejantes, congruentes o coincidentes. Pero los extremos son siempre semejantes. Por lo tanto, dos rectas cualesquiera son semejantes, y cada parte es semejante al todo.

(5) *Tercero*, se desprende de la definición que la recta pasa por puntos únicos en su relación con dos puntos dados, relación que está máximamente determinada. Es necesario por otra parte que tales [puntos] existan, pues de otra manera, de dos [puntos] dados no resultaría nada nuevo determinado. Y si hubiera otro punto en la misma relación que el punto considerado, con A y B tomados a la vez, no habría ninguna razón para que el trayecto máximamente simple determinado pasase por uno más bien que por el otro. Esto es obvio también por lo dicho antes, pues hemos mostrado que, dados los extremos, la recta está determinada, o que si los extremos coinciden, coinciden las rectas.

(6) Se sigue, *cuarto*, que la recta está igualmente dispuesta por todos lados,[27] y no tiene concavidad y convexidad como la curva, ya que los dos puntos presupuestos A y B no proporcionan ninguna razón para la diversidad.

(7) Y por esto, si se consideran dos puntos cualesquiera L y M, fuera de la recta, que estén en la misma relación con dos puntos de la recta tomados conjuntamente, de modo que L tenga con A y B la misma relación que M tiene con A y B, [esos dos puntos] estarán en igual relación con la recta entera, esto es, L tendrá con la recta que pasa por A y B la misma relación que M tiene con ella.

---

[27] *Rectam in omnes plagas se habere eodem modo.*

(8) Es manifiesto también que una recta rígida, esto es, cuyos puntos [27] no cambian sus posiciones relativas, no puede moverse si dos de sus puntos permanecen inmóviles; de otro modo habría más de un punto en la recta en la misma relación con los dos puntos inmóviles, a saber, tanto el punto en que estaba cualquier punto móvil, como aquél al cual es trasladado.

(9) Se sigue, a la inversa, que todos los otros puntos que no están en la recta que pasa por A y B, o no están en la dirección AB, pueden moverse conservando su posición relativa a A y B, mientras A y B permanecen inmóviles, pues la recta es el lugar de todos los puntos que se relacionan con A y B de un modo único;[28] por lo tanto, los demás pueden variar doquiera se hallen, pues la recta es uniforme por todos lados.[29]

(10) En consecuencia, si un [objeto] extenso rígido se mueve de modo que dos puntos suyos permanezcan inmóviles, todos sus puntos en reposo caen en la recta que pasa por los puntos inmóviles, y cualquier punto móvil describe un círculo en torno a esa recta tomada como eje.

Dados tres puntos no situados en la misma recta, lo determinado por ellos es un *plano*. Sean A, B, C puntos no situados en la misma recta; con los puntos A, B se determina la recta que pasa por A y B; con los puntos C y B se determina la recta que pasa por C y B. Con cualquier punto de la recta por A y B junto con cualquier punto de la recta por C y B se determina una recta nueva y de este modo, dados A, B, C, se determinan infinitas rectas, cuyo lugar se llama *plano*.

1) Así pues, *primero*, el plano es el mínimo entre sus extremos.[30] Pues su ámbito no consiste en una recta, ya que una recta no encierra un espacio; de otro modo, una parte de la recta no sería semejante al todo. Por lo tanto, dado el ámbito, están dados tres

---

[28] Entiéndase: los puntos cada uno de los cuales tiene una relación única con el par A, B.

[29] También aquí parafraseo. Leibniz escribe: *Caetera ergo variari possunt et quidem in omnes partes, cum recta eodem modo se habeat in omnes partes*. No me parece aceptable traducir *in omnes partes* como *en todas direcciones*, como hace Loemker; bajo las restricciones prescritas un punto fuera de la recta AB no puede moverse *en todas direcciones*, ya que no puede acercarse a esa recta, ni alejarse de ella, ni desplazarse paralelamente a ella. La línea a que están restringidos sus movimientos aparece descrita en el próximo párrafo, que Loemker traduce con cabal exactitud.

[30] Esto es, la superficie mínima que tiene esos límites.

puntos no situados en la misma recta; por lo tanto, con sólo dar el ámbito se determina el plano encerrado por él. Por lo tanto, es el mínimo.

2) *Segundo*, el plano es uniforme [*aequabile*] entre sus extremos, puesto que de este origen suyo no puede deducirse ninguna razón de variedad.

3) De esto se sigue que el plano es interiormente semejante a sí mismo, de modo que si un punto se mueve en él, el lugar en que está no se distingue de otro lugar salvo relativamente a los extremos. Ni se puede distinguir una parte del plano de otra parte excepto por [referencia a] los extremos.

4) Se sigue además, que los planos cuyos ámbitos son semejantes, o congruentes, o coincidentes, son ellos mismos semejantes, o congruentes, o coincidentes.

5) *Tercero*, es obvio por la definición del plano que éste es el lugar de todos los puntos únicos relativamente a los tres puntos dados.[31]

[28] 6) *Cuarto*, se sigue que el plano está igualmente dispuesto por los dos lados,[32] y por lo tanto no tiene concavidad ni convexidad.

7) Y por esto, si un punto está en cualquier relación con A, B y C simultáneamente o con el plano determinado por ellos, puede hallarse otro punto correspondiente que está en la misma relación con esos tres puntos tomados a la vez, pues no hay ninguna razón de diversidad.

8) El plano, por otra parte, está dotado de anchura, ya que puede cortarlo una línea recta que pase por dos puntos suyos dados. Por lo tanto un corte suyo tiene longitud; aquello, empero, cuyo corte tiene longitud, posee anchura.

Dados cuatro puntos no situados en el mismo plano resulta un [objeto] profundo, o sea, uno en el que puede suponerse algo que no es límite, esto es, [algo] que no puede serle común con otro [objeto], salvo si [éste] está inmerso como parte en él.

Sean cuatro puntos A, B, C, D (fig. 1). Con esto están dadas seis rectas AB, AC, AD, BC, BD, CD; pero bastan AB, AC, AD, pues las tres restantes nacen de éstas. Si prosultan estas tres rectas,

---

[31] Esto es, todos los puntos cada uno de los cuales es el único punto del espacio que tiene precisamente esa relación que él tiene con los tres puntos dados.

[32] *Planum utrinque se habere eodem modo.* Compárese la nota 26.

prosultan todos sus puntos, y las rectas que unen dos puntos cualesquiera de rectas diferentes, y, por tanto, el lugar de todas estas rectas. Tenemos, pues, además los cuatro planos por A, B, C, por A, B, D, por A, C, D, por B, C, D, dos cualesquiera de los cuales tienen un corte recto común; por ejemplo, los planos por A, B, C

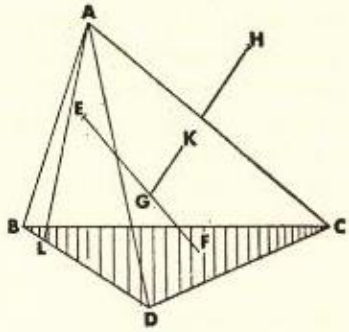

Fig.1

y por B, C, D tienen un corte común que es la recta que pasa por B, C. Estos cuatro planos encierran [*claudent*] un espacio con los cuatro triángulos planos ABC, ABD, ACD, BCD, que constituyen el ámbito de ese espacio. Y una recta cualquiera EF que une dos puntos E y F de los planos ABC, BCD, tiene todos sus puntos (como G) dentro de este espacio, de modo que desde el punto G interpuesto entre los extremos de esa recta no puede tirarse ninguna recta que no incida en el ámbito. [Se dice que] *encierran un espacio* los [extremos] que constituyen un ámbito completo, esto es, un ámbito tal que cualquiera línea trazada en una parte del mismo, cuando llega al término de esa parte, pueda continuar en otra parte del ámbito. Por ejemplo, la recta AL trazada en la parte ABC del ámbito, cuando llega a su término L no podría continuar en otra parte del ámbito si faltase el triángulo BCD que con los otros tres, ABC, ABD, ACD, cumple la función [*opus absolvit*] de encerrar el espacio. Supongamos que aquella recta se prolongue[33] cuanto sea necesario hasta un punto H que dista más del punto G que todos los puntos de los triángulos ABC, ABD, ACD, BCD. Bájense las

[33] Entiendo: la recta cualquiera EF, introducida arriba. La prolongación pedida no está marcada en la figura, ni tampoco el punto H de que se habla aquí. Véase la nota 35.

perpendiculares desde el punto H y también desde el punto G a los cuatro planos; se hallará uno de estos planos en el cual las perpendiculares [29] desde G y H no caen desde el mismo lado; uno de estos planos debe cortar GH[34] en el triángulo del cual ese plano es la continuación; digo que la recta GH, prolongada si necesario, incide en uno de estos planos. Si se toma otro punto cualquiera H,[35] digo que la recta GH, prolongada si es necesario, incide en uno de los cuatro triángulos, por ejemplo ABC,[36] en K; el plano determinado por E, F, H cortará los planos ABD, ACD, BCD, en tres rectas que forman un triángulo dos de cuyos lados caen en dos de los triángulos susodichos, mientras el punto G cae dentro de ese triángulo. Por lo tanto, cualquier recta que pase por G cortará uno de estos dos lados, y en consecuencia la recta GH incide en uno de los triángulos[37] ABD, ABC, BCD, en K. Del mismo modo se prueba que por el otro extremo incide en uno de los otros tres triángulos. Pero mostramos la cosa más brevemente.[38]

---

[34] La edición de Gerhardt trae GK; el gazapo es evidente.

[35] Mantengo la designación del original, aunque obviamente sería más claro designar este nuevo punto —no colineal con E y F— con otra letra. Desde aquí hasta el final la H se refiere a este nuevo punto, marcado con H también en la figura.

[36] Gerhardt escribe ABD, pero la figura que he copiado de su edición coloca el punto K en el triángulo ABC.

[37] El texto de Gerhardt dice (después de la última coma): "ergo et recta GH, ergo recta GH ocurrit uni ex triangulis". Me parece obvio que hay un error, probablemente en el manuscrito mismo. He ajustado las designaciones de los triángulos a la modificación explicada en la nota 36; Gerhardt trae ABD, ACD, BCD.

[38] El texto termina abruptamente aquí.